

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
INSTITUT DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

Recherches sur la compréhension des règles algébriques chez l'enfant

THÈSE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES DE L'ÉDUCATION

PAR

LYDIA MULLER

DE

GENÈVE (SUISSE)

Thèse N° 2

NEUCHÂTEL
IMPRIMERIE DELACHAUX & NIESTLÉ S. A.
1956

RECHERCHES SUR LA COMPRÉHENSION
DES RÈGLES ALGÈBRIQUES CHEZ L'ENFANT

Recherches sur la compréhension des règles algébriques chez l'enfant

THÈSE

PRÉSENTÉE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE
POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES DE L'ÉDUCATION

PAR

LYDIA MULLER

DE

GENÈVE (SUISSE)

Thèse N° 2



NEUCHÂTEL
IMPRIMERIE DELACHAUX & NIESTLÉ S. A.
1956

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
INSTITUT DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

L'Institut des Sciences de l'Éducation, sur le préavis d'une commission formée des professeurs JEAN PIAGET, ROBERT DOTRENS et BÄRBEL INHELDER, autorise l'impression de la présente thèse, sans entendre par là exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont énoncées.

Genève, le 12 novembre 1954.

R. DOTRENS
Co-directeur

Thèse N° 2.

Cette thèse est publiée dans les *Actualités pédagogiques et psychologiques* (Delachaux & Niestlé, Neuchâtel et Paris).

AVANT-PROPOS

Au moment d'entreprendre l'exposé de mes recherches, je tiens tout d'abord à exprimer ma très vive gratitude à M. le professeur Piaget. Grâce à sa sensibilité pédagogique toujours en éveil, M. Piaget a observé que le principe d'inversion pouvait faire l'objet de jeux très simples et qu'il y avait là, dès lors, un moyen de préparer l'enfant à l'étude de la règle des signes et des éléments de l'algèbre. Ses propres observations ont ainsi orienté mes travaux dans ce domaine et j'ai toujours trouvé auprès de lui, dans mes recherches, la plus bienveillante compréhension et les plus utiles conseils.

Ma gratitude va également à M^{lle} Inhelder qui m'a suivie régulièrement et m'a guidée dans mes expériences. Ses remarques, ses suggestions, et jusqu'à son aide pratique m'ont été très précieuses et je dois beaucoup à sa constante attention.

Je remercie aussi très vivement M. Dottrens, qui a bien voulu revoir mon travail et me faire profiter de sa grande expérience pédagogique, en me signalant notamment des études antérieures qui ont été très utiles à mes propres recherches et en me faisant des remarques précieuses pour la disposition de mon exposé.

Enfin j'adresse les plus sincères remerciements aux Directeurs et aux Maîtres des écoles enfantines, primaires et secondaires qui ont autorisé leurs élèves à se prêter à mes expériences et ont ainsi rendu possibles mes recherches.

Je tiens à signaler encore, en lui exprimant ma reconnaissance, que les croquis illustrant cette étude sont dus à M. Jan Gleysteen, d'Amsterdam.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546406_0004

Introduction

La pédagogie de la petite enfance et celle du degré primaire ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales et ont donné lieu à des travaux systématiques. On ne peut pas en dire autant de la pédagogie du degré secondaire qui est demeurée un domaine assez peu exploré. C'est le talent du maître, ce sont ses années d'expérience qui doivent remplacer les données fondées sur des faits psychologiques scientifiquement démontrés. Ce talent, cette intuition pédagogique ne sont heureusement pas rares dans le corps enseignant et il faut rendre hommage aux maîtres qui cherchent, sans se lasser et avec une conscience admirable, une méthode d'enseignement adaptée au développement mental de leurs élèves.

On peut se demander toutefois si des travaux systématiques sur le degré secondaire (à partir de l'âge de onze ou douze ans), ne pourraient pas rendre aux maîtres de réels services en leur évitant bien des tâtonnements. Le nombre assez restreint d'études de ce genre s'explique d'ailleurs fort bien. Tous ceux qui se sont adonnés à la psychologie pédagogique savent en effet que les premières années jouent un rôle important dans le développement de l'individu, que rien ne pouvait être construit de solide en pédagogie sans une connaissance approfondie de la psychologie du petit enfant et que l'élaboration de saines méthodes d'éducation destinées à cet âge était la tâche la plus urgente et la plus nécessaire.

Nous nous sommes proposé de diriger notre investigation dans un domaine réservé d'ordinaire aux enfants du niveau secondaire, à savoir l'enseignement de l'algèbre, ou du moins, de ses éléments. Afin de ne pas disperser nos efforts et de donner à cette étude des limites raisonnables, nous avons borné nos expériences à un champ assez étroit des éléments algébriques, celui de la règle des signes.

Présentons tout d'abord la règle des signes du point de vue mathématique :

La règle des signes est une opération algébrique. Nous commencerons par définir le terme d'opération en décrivant de simples opérations arithmétiques, telles que l'addition, la soustraction et la multiplication. Puis, pour passer à l'algèbre, nous serons obligée de faire la distinction

entre les signes des opérations et les signes propres aux nombres algébriques. Ceci nous permettra de décrire les opérations algébriques qui nous intéressent, soit l'addition, la soustraction et la multiplication.

C'est à la multiplication algébrique que se rapporte la règle des signes. Mais la multiplication ne peut se définir qu'à partir de l'addition dont elle est issue. C'est pourquoi nous parlerons tout d'abord de l'addition qui est l'opération fondamentale tant en arithmétique qu'en algèbre.

LES OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES

L'addition

L'addition est née de besoins concrets : on s'est trouvé dans la nécessité d'ajouter un groupe d'objets à un autre, un troupeau de moutons à un autre, par exemple. Une telle opération a d'abord été exécutée matériellement ; on peut imaginer que les objets de la première collection ont été alignés et qu'à leur suite on a disposé ceux de la seconde collection de la même façon, ce qui a permis d'en obtenir facilement le total. Puis il n'a plus été nécessaire de grouper les objets eux-mêmes ; on s'est contenté de compter, sur ses doigts par exemple, faisant en sorte que chaque doigt corresponde à un objet. Ce procédé s'est trouvé nécessaire dans le cas où il était impossible de grouper les objets eux-mêmes.

Les diverses substitutions que l'on a pu imaginer : doigts, autres parties du corps, etc., marquent déjà un pas vers l'abstraction. Remplaçant ainsi objet par objet, comptant des collections, on a pris conscience des unités, puis chacune de ces collections a été considérée comme un tout auquel on a attaché un nombre. L'origine des signes graphiques dont nous nous servons est plutôt obscure. Des signes semblables aux nôtres étaient en usage dans les Indes avant la fin du 11^e siècle de notre ère. Les Arabes d'Orient, puis les Maures, en modifièrent légèrement la forme. Des Arabes d'Espagne ou des Barbares, ces chiffres passèrent enfin aux Européens occidentaux. A partir de 1500, les symboles employés ne diffèrent pratiquement pas des nôtres ¹.

Cette étape indique encore un progrès, parce que dès que l'on voit le chiffre représentant le groupe, on sait combien il y a d'unités dans ce groupe, tandis que s'il fallait évaluer visuellement une collection d'objets, on ne pourrait pas le faire si le groupe dépassait cinq à dix unités.

Voici la définition qu'on peut donner de cette opération : additionner deux nombres, c'est compter successivement les unités du second à la suite de celles du premier. Le nombre auquel on s'arrête est appelé la somme.

¹ ROUSE BALL, W. W., *Histoire des mathématiques*. Paris, Librairie scientifique A. Hermann, 1906 (édition française revue et augmentée), tome I, p. 138, p. 177, p. 191-194.

La soustraction

Mais s'il est parfois nécessaire d'ajouter des unités les unes aux autres et d'en effectuer le total, il peut être nécessaire de faire l'opération inverse, c'est-à-dire enlever des unités d'une collection d'unités et envisager le résultat de la séparation. C'est cette opération qu'on appelle soustraction.

La multiplication

Parfois on a dû additionner plusieurs collections les unes à la suite des autres. Si toutes les collections que l'on additionne (ou addendes) contiennent le même nombre d'unités, ce qui revient à dire : si tous les addendes sont égaux, on peut abréger l'addition de la façon suivante : au lieu de compter les unités des collections successives à la suite les unes des autres, comme on le ferait dans l'exemple suivant :

$$\begin{array}{cccc} \dots\dots\dots & & & \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

on peut compter les unités de chaque addende et les prendre aussi souvent ou autant de fois qu'il y a d'addendes. Dans l'exemple que nous venons de donner, il y a trois unités par addende et le nombre d'addendes est de quatre; nous prenons donc quatre fois trois unités, nous disons alors que nous multiplions trois unités par quatre. Il s'agit donc d'une multiplication, l'addende commun est appelé le multiplicande tandis que le nombre de fois que l'on prend cet addende est appelé le multiplicateur. Nous pouvons ainsi dire que la multiplication est une addition abrégée dont tous les addendes sont égaux.

Afin de ne pas avoir besoin de refaire chaque fois l'addition et de pouvoir en donner le total (ou produit) en connaissant la valeur des addendes et leur nombre, il suffit d'apprendre par cœur le résultat des multiplications élémentaires (ou table de multiplications).

Des cas se présentent aussi dans lesquels il s'agit non pas d'ajouter, mais d'enlever plusieurs collections d'unités. Lorsque toutes ces collections d'unités à enlever se trouvent être égales, on s'arrange naturellement aussi pour les enlever ensemble, c'est-à-dire pour enlever le nombre d'unités de chacune de ces collections autant de fois qu'il y a de collections. Ainsi, dès que l'on sait par cœur la table de multiplications, on sait immédiatement combien d'unités il faut enlever au total.

LES SIGNES PROPRES

Il se trouve cependant des situations dans lesquelles les opérations arithmétiques ne suffisent plus. Comme le dit Rignano ¹, un possesseur

¹ RIGNANO, EUGENIO, *Psychologie du raisonnement*, Paris, Félix Alcan, 1920, p. 211.

de cent mille francs peut en perdre cent vingt mille au jeu. Les vingt mille francs perdus en plus des cent mille qu'il a pu payer représentent une grandeur du même genre que ces cent mille francs, mais de sens « opposé ». Il se trouve d'autres cas semblables : la fortune et les dettes, l'avance et le recul, l'altitude au-dessus et au-dessous de la mer, etc.

Prenons un exemple de grandeurs douées de deux sens opposés : un trajet peut s'effectuer soit de A à B , soit de B à A .

$$A \longleftrightarrow B$$

Pour distinguer les deux sens, on qualifie l'un de positif et l'autre de négatif. Si le trajet est de sens positif, on dit que sa mesure est un nombre positif; si au contraire il se trouve être de sens négatif, on dit que sa mesure est un nombre négatif. Ce sont ces nombres, positifs et négatifs, qui constituent justement les nombres algébriques.

Le nombre algébrique est donc un nombre qui tient compte du sens dans lequel on a mesuré, tandis que le nombre absolu (ou arithmétique) ne tient pas compte de ce sens. On peut dire que le nombre algébrique contient à la fois un nombre absolu et un sens.

On affecte le nombre positif d'un signe $+$ et le nombre négatif d'un signe $-$.

LES SIGNES OPÉRATOIRES

Il est évident que ces signes algébriques plus et moins marquent une idée distincte des signes opératoires d'addition et de soustraction que nous avons définis au début de cette étude (p. 7-8). Les signes algébriques ne sont là que pour indiquer le sens dans lequel on a mesuré.

Pour éviter toute confusion, on appelle habituellement signes propres, les signes des nombres algébriques et signes opératoires, les signes des opérations d'addition et de soustraction. On écrit généralement les nombres algébriques entre parenthèses, du moins dans tous les cas où pourrait se produire une confusion avec les signes opératoires.

On peut cependant se demander quel est le rapport entre les signes propres et les signes opératoires. Les exemples que nous avons donnés, d'après Rignano, pour montrer comment on s'est trouvé dans l'obligation d'introduire des signes propres, nous font voir que les nombres négatifs sont nés d'une soustraction dont le terme à soustraire était plus grand que le terme dont on voulait le soustraire. Le nombre négatif peut donc être considéré comme le résultat d'une certaine soustraction, le signe négatif (signe propre) n'étant ainsi que la conséquence du signe opératoire d'une soustraction particulière.

D'autre part, les signes propres ($+$ et $-$), aussi bien que les signes opératoires ($+$ et $-$) marquent un fait et son inverse; le signe opératoire $+$ marque l'addition tandis que le signe opératoire $-$ marque

l'opération inverse, soit la soustraction. Le signe propre $+$ marque le sens positif tandis que le signe propre $-$ marque le sens inverse, soit le sens négatif.

Cela revient à dire que le signe opératoire moins indique une inversion d'opération et que le signe propre moins indique une inversion de sens. Nous ne saurions assez souligner le fait qu'il ne s'agit pas d'une différence de nature, mais au contraire d'une seule et même espèce d'inversion.

LES OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES

Passons aux opérations algébriques qui permettent de résoudre des problèmes faisant intervenir des gains et des dettes, de l'avance ou du recul, etc. Remarquons que, puisque nous parlons d'opérations, il sera question de signes opératoires et que, d'autre part, le fait qu'il s'agit de nombres algébriques implique des signes propres.

Les opérations sur les nombres algébriques s'effectuent de la même façon que les opérations sur les nombres absolus, soit :

L'addition

Additionner un nombre algébrique à un autre, c'est compter les unités du second nombre à la suite de celles du premier, toutes les unités étant naturellement prises dans le sens qui leur est propre : soit dans le sens d'un gain ou d'une perte, d'une avance ou d'un recul, d'une hauteur ou d'une profondeur, etc. Voici des exemples :

Ajouter trois unités positives à cinq unités positives, donne huit unités positives : $(+5) + (+3) = +8$. 

Ajouter trois unités négatives à cinq unités négatives, donne huit unités négatives : $(-5) + (-3) = -8$. 

Ajouter trois unités négatives à cinq unités positives, donne deux unités positives : $(+5) + (-3) = +2$. 

Ajouter trois unités positives à cinq unités négatives, donne deux unités négatives : $(-5) + (+3) = -2$. 

Voici encore un exemple, tout à fait simple, faisant intervenir des gains et des pertes :

Si je fais cinq francs de gain et encore trois francs de gain, j'ai au total huit francs de gain.

Si je fais cinq francs de perte et encore trois francs de perte, j'ai au total huit francs de perte.

Si je fais cinq francs de gain et trois francs de perte, j'ai au total deux francs de gain.

Si je fais cinq francs de perte et trois francs de gain, j'ai au total deux francs de perte.

Remarquons que l'addition algébrique correspond tout aussi bien à une diminution qu'à une augmentation.

La soustraction

Soustraire un nombre algébrique d'un autre, c'est faire l'opération inverse de l'addition, c'est-à-dire enlever les unités du second nombre de celles du premier, toutes les unités étant naturellement prises dans leur sens propre. Voici quelques exemples :

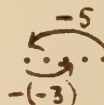
Enlever trois unités positives à cinq unités positives, donne deux unités positives : $(+5) - (+3) = +2$.



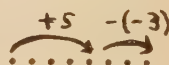
Enlever trois unités positives à cinq unités négatives, donne huit unités négatives : $(-5) - (+3) = -8$.



Enlever trois unités négatives à cinq unités négatives, donne deux unités négatives : $(-5) - (-3) = -2$.



Enlever trois unités négatives à cinq unités positives, donne huit unités positives : $(+5) - (-3) = +8$.



On pourrait encore simplifier ces exemples, en remplaçant les termes de positif et de négatif par les termes de gain et de perte, etc.

Voyons ces exemples de plus près. Le signe opératoire de soustraction, c'est-à-dire le fait de soustraire le second nombre du premier, a régulièrement provoqué un résultat de signe inverse au signe propre du nombre qu'on devait soustraire. Autant dire que pour soustraire un nombre algébrique d'un autre nombre algébrique, il faut compter à la suite de cet autre nombre les unités du nombre algébrique que l'on veut soustraire, mais dans le sens opposé à leur sens propre. Ce qui revient encore à dire qu'il faut additionner le nombre opposé. En algèbre, toute soustraction peut donc être remplacée par une addition puisque le résultat

est le même. Ceci provient du fait que nous avons déjà signalé, à savoir que le signe moins (tant propre qu'opérateur) indique un inverse, soit un sens inverse, soit une opération inverse. Dans la soustraction, qui fait toujours intervenir un signe moins opératoire, les signes opératoires et propres jouent pratiquement le même rôle et peuvent ainsi être interchangés.

Résumons en disant qu'au lieu de soustraire des nombres algébriques dans leur sens propre, on peut toujours additionner les nombres opposés. On effectue ainsi l'inverse de la soustraction, c'est-à-dire l'addition et l'on prend les nombres dans le sens contraire à leur sens propre.

Remarquons que la soustraction algébrique peut aboutir aussi bien à une augmentation qu'à une diminution.

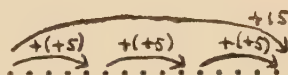
La multiplication

La multiplication résume l'addition dont tous addendes sont égaux. Multiplier un nombre algébrique par un autre, c'est prendre ce nombre autant de fois que l'autre l'indique.

Voyons tout d'abord la multiplication dérivée de l'addition. Il s'agit dans ce cas d'additionner un nombre de fois déterminé une certaine collection d'unités. Voici des exemples :

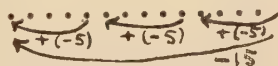
Ajouter trois fois cinq unités positives,
donne quinze unités positives :

$$(+5) \cdot (+3) = +15.$$



Ajouter trois fois cinq unités négatives
donne quinze unités négatives :

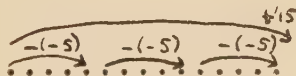
$$(-5) \cdot (+3) = (-15).$$



Voyons maintenant la multiplication dérivée de la soustraction. Il s'agit de soustraire un nombre de fois déterminé une certaine collection d'unités. Voici des exemples :

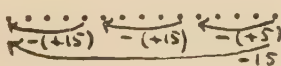
Enlever trois fois cinq unités négatives
donne quinze unités positives :

$$(-5) \cdot (-3) = (+15).$$



Enlever trois fois cinq unités positives,
donne quinze unités négatives :

$$(+5) \cdot (-3) = (-15).$$



Il convient naturellement de faire, à propos de la multiplication algébrique, les mêmes remarques que nous venons de faire à propos de l'addition et de la soustraction algébriques : Lorsqu'il s'agit d'une multiplication abrégeant la soustraction, le signe propre des unités qu'on multiplie est inversé, c'est-à-dire qu'il devient opposé à ce qu'il était ; tandis que lorsqu'il s'agit d'une multiplication abrégeant l'addition, le signe propre des unités qu'on multiplie n'est point changé. Nous pouvons formuler ce même fait plus brièvement : Effectuer une multiplication algébrique, c'est prendre les unités du multiplicande autant de fois que l'indique le multiplicateur, dans leur sens propre si le multiplicateur est positif et dans le sens opposé à leur sens propre si le multiplicateur est négatif.

Remarquons que, dans la multiplication comme dans la soustraction, les signes propres et opératoires jouent pratiquement le même rôle et qu'ainsi ils peuvent être interchangés sans que le résultat en soit modifié.

Voyons un exemple concret, celui des gains et des pertes pour rester dans le même sujet :

Si j'ajoute trois fois un gain de cinq francs, cela revient à dire que je gagne quinze francs.

Si j'ajoute trois fois une perte de cinq francs, cela revient à dire que je perds quinze francs.

Si j'annule trois fois une perte de cinq francs, cela revient à dire que je gagne quinze francs.

Si je manque trois fois une occasion de gagner cinq francs, cela revient à dire que je perds quinze francs.

Exprimons-nous de façon plus concrète encore, en prenant cette fois-ci un exemple d'avance et de recul. Supposons que je sois à Genève et désire me rendre à Lausanne. La ville opposée à Lausanne par rapport à Genève, se trouve être Bellegarde. Lorsque devant moi, se trouve la ville dans laquelle je veux me rendre : Lausanne, je dis que je suis en position positive ; lorsque devant moi se trouve la ville qui lui est opposée par rapport à Genève, soit Bellegarde, je dis que je suis en position négative. Avancer est considéré comme positif et reculer comme négatif.

Si j'ai avancé de trois fois cinq kilomètres, Lausanne se trouvant devant moi, je suis arrivé à Coppet (village situé entre Genève et Lausanne). Par rapport au but, j'ai donc avancé de quinze kilomètres, soit : $(+5) \cdot (+3) = (+15)$.

Si j'ai avancé de trois fois cinq kilomètres, Bellegarde se trouvant devant moi, je suis arrivé à Chancy (village situé entre Genève et Bellegarde). Par rapport au but qui est Lausanne, j'ai donc reculé de quinze kilomètres, soit : $(-5) \cdot (+3) = (-15)$.

Si j'ai reculé de trois fois cinq kilomètres, Bellegarde se trouvant devant moi, je suis arrivé à Coppet. Par rapport au but, j'ai donc avancé de quinze kilomètres, soit : $(-5) \cdot (-3) = (+15)$.

Si j'ai reculé de trois fois cinq kilomètres, Lausanne se trouvant devant moi, je suis arrivé à Chancy. Par rapport au but, j'ai donc reculé de quinze kilomètres, soit : $(+5) \cdot (-3) = (-15)$.

Nous pouvons donc établir pour la multiplication algébrique, la règle suivante : Lorsqu'il s'agit d'un multiplicateur affecté d'un signe plus (ou d'addition), on prend la collection d'unités à multiplier dans le sens qui lui est propre :

<i>Collection d'unités</i>	<i>Multiplicateur</i>	<i>Sens dans lequel on prend les unités</i>
(+)	+	(+)
(—)	+	(—)

Lorsqu'il s'agit d'un multiplicateur affecté d'un signe moins (ou de soustraction), on prend la collection d'unités dans le sens opposé (ou contraire) à celui qui lui est propre :

<i>Collection d'unités</i>	<i>Multiplicateur</i>	<i>Sens dans lequel on prend les unités</i>
(+)	—	(—)
(—)	—	(+)

Nous pouvons donc observer le tableau suivant, concernant les signes des quatre multiplications :

$$\begin{aligned}
 (+) \cdot (+) &= (+) \\
 (—) \cdot (+) &= (—) \\
 (+) \cdot (—) &= (—) \\
 (—) \cdot (—) &= (+)
 \end{aligned}$$

Remarquons que le résultat est positif quand il s'agit d'une multiplication comportant ou bien deux signes positifs ou bien deux signes négatifs, et qu'il est négatif quand il s'agit d'une multiplication comportant un signe positif et un signe négatif. Ce qui s'exprime plus brièvement de la façon suivante :

Le résultat est positif quand il s'agit d'une multiplication comportant deux mêmes signes, et négatif lorsque celle-ci comporte deux signes différents (ou opposés). Telle est la règle des signes.

PSYCHOLOGIE

Voyons maintenant cette règle des signes du point de vue des opérations psychologiques qu'elle nécessite.

Le mathématicien fait la distinction entre les signes propres et opératoires tout en constatant le fait que ces deux sortes de signes sont

pratiquement interchangeable. Aussi, poursuivant toujours son but de simplification et de généralisation des problèmes, ne s'attarde-t-il pas sur cette distinction. La signification fondamentale du signe moins (tant opératoire que propre) étant l'inversion, il sait bien, que, quelles que soient les sortes de signes qui interviennent (propres ou opératoires), lorsqu'il y a inversion d'inversion, il y a trajet dans un sens puis retour au point de départ. Deux inversions redonnent ainsi le point de départ.

Le résultat est toujours le même et ce fait s'explique facilement. Notre logique habituelle est bivalente; s'il ne s'agit pas du premier terme, c'est le second qui intervient. Une proposition, par exemple, est vraie ou fausse; il n'y a pas de troisième possibilité. De même, l'algèbre ne tient compte que de deux espèces de nombres; tout ce qui n'est pas nombre positif est nombre négatif et vice versa.

La règle des signes implique l'addition et la soustraction, qui est l'opération inverse de l'addition. Or, comme on peut le remarquer, ces opérations ont un caractère réversible. De même, la compréhension de la règle des signes implique la connaissance des nombres négatifs qui sont les nombres inverses des nombres positifs. Il s'agit donc encore ici de réversibilité. Que le signe — indique une soustraction ou qu'il affecte un nombre négatif, il signale toujours la réversibilité d'une opération. Ainsi, la règle qui s'exerce sur ces signes, est une opération directe de réversibilité.

Quel est le rôle de la réversibilité en psychologie ? Il s'agit, comme on le sait, d'un problème ayant trait à la psychologie de l'intelligence. Or différentes théories ont été proposées à ce sujet. Piaget les classe selon le rapport qu'elles sous-entendent entre le sujet et l'objet; il les ramène à six groupes fondamentaux ¹: trois statiques et trois génétiques, chacun de ces trois groupes comprenant une théorie qui insiste sur :

1. la primauté de l'objet.
2. la primauté du sujet.
3. l'interaction du sujet et de l'objet.

La psychologie opératoire

La théorie opératoire de l'intelligence, ou théorie de Piaget de caractère génétique, met l'accent sur les interactions de l'organisme et du milieu. Cette théorie correspond en biologie, à l'interactionisme qui, bien loin d'attribuer le primat au milieu extérieur ou à renfermer entièrement l'organisme en lui-même, reconnaît l'interdépendance du milieu et de l'organisme. Ce point de vue correspond aussi au relativisme de la

¹ PIAGET, JEAN, *Introduction à l'épistémologie génétique*, tome III. Paris, Presses Universitaires de France, 1950, p. 113.

théorie de la connaissance. Pour Piaget, en effet, il n'existe pas d'accommodation aux objets sans une assimilation de ceux-ci à l'activité du sujet et réciproquement; le rapport entre le sujet et l'objet est indissociable dès le principe: Ce rapport se retrouve jusque dans l'équilibre final des opérations qui sont simultanément accommodation à l'expérience et assimilation du réel à l'intelligence du sujet¹. Or, selon cette théorie, la réversibilité est sans aucun doute le caractère le plus spécifique de l'intelligence. On comprendra donc de quelle importance a été pour nous cette théorie pour l'étude de la règle des signes dont le caractère propre est précisément la réversibilité.

LES OPÉRATIONS

L'un des problèmes auxquels s'attache la psychologie opératoire est de comprendre comment les opérations, dont la forme supérieure est logique et mathématique, s'élaborent à partir de l'action matérielle.

L'intériorisation des actions

Le tout jeune enfant se sert de gestes imitatifs à titre de représentations. A partir de l'âge de 2 ans, nous assistons à l'intériorisation des mouvements nécessaires à l'imitation; ainsi se constituent les formes les plus simples d'images mentales et ainsi se prépare peu à peu l'opération dont l'origine est une action intérieure.

Dans notre Troisième Partie, nous décrivons certaines de ces images virtuelles², lesquelles, comme le dit Piaget, de 2 à 7 ans, demeurent sous la dépendance étroite des mouvements. « La représentation imagée ne se manifeste que sous les espèces d'une reproduction imitative à peine intériorisée des mêmes mouvements. Une fois intériorisée, elle conserve toujours une composante motrice. »³

La réversibilité

A partir de l'âge de 7 ans intervient un second facteur, lié à celui de l'intériorisation: il s'agit de la réversibilité. En effet, entre la septième ou huitième année et l'âge de onze ou douze ans, la réversibilité s'acquiert peu à peu. Dans la mesure où les opérations ne sont plus effectuées sous forme d'actions matérielles, mais où les mouvements qui les constituent

¹ PIAGET, JEAN, *Introduction à l'épistémologie génétique*, tome III. Paris, Presses Universitaires de France, 1950, p. 121.

² P. 132.

³ PIAGET, JEAN, *Le problème neurologique de l'intériorisation des actions en opérations réversibles*. Genève, « Archives de Psychologie », 1949, vol. XXXII, N° 128, p. 243.

sont intériorisés, ceux-ci doivent en effet, nécessairement pouvoir être imaginés ou représentés dans les deux sens de leur parcours. C'est à propos de ce double processus d'intériorisation et de réversibilité croissantes que Piaget cite l'exemple de l'expérience des trois perles de couleurs différentes dont nous parlons dans notre Troisième partie ¹. On verra qu'à ce stade de développement l'enfant n'a pas besoin d'exécuter matériellement le mouvement et qu'il parvient à imaginer le renversement de situation qu'implique la rotation du dispositif. L'action est intériorisée en représentation et les deux mouvements sont imaginés en tant que solidaires l'un de l'autre. Cet exemple montre bien que le schéma de l'intériorisation doit être complété par un schéma de coordination réversible.

• A partir de l'âge de 11-12 ans, les opérations sont entièrement intériorisées. Dans l'article que nous citons plus haut, Piaget souligne entre autres, une application de la règle des signes $(-2) \times (-2) = (+4)$ en précisant qu'il s'agit bien encore psychologiquement d'actions intériorisées, « mais portant cette fois sur des objets quelconques symbolisés par des signes verbaux ou algorithmiques; ces actions s'accompagnent sans doute toujours, mais à l'arrière-plan, d'une image évoquant un modèle de réalisation possible; seulement la réversibilité ne porte plus ici sur les opérations comme telles, pouvant à la limite être pensées, indépendamment de leur résultat et sous forme d'un simple schème abstrait. ² »

Les opérations de la pensée ne se constituent pas sous une forme isolée mais se groupent nécessairement en systèmes d'ensemble.

L'intelligence est un système d'opérations et un instrument d'échanges entre l'organisme et le milieu. Les échanges entre l'organisme et le milieu tendent à un équilibre entre l'assimilation ou action de l'organisme sur le milieu et l'accommodation ou action du milieu sur l'organisme.

Dégager les lois d'équilibre de ces systèmes, tel est le problème essentiel de la psychologie. D'après Piaget, le processus interne selon lequel s'effectue ce passage d'une phase d'équilibration progressive (pensée représentative) à une équilibration mobile (opérations) est le groupement. Cinq conditions doivent être remplies pour que ce groupement se réalise :

1. La coordination des opérations (ou composition).
2. La réversibilité des transformations.
3. L'associativité des opérations (la pensée est libre de faire des détours et un résultat obtenu par deux voies différentes reste le même).

¹ P. 122.

² *Ouvrage cité*, p. 245-246.

4. L'identité (une opération combinée avec son inverse est annulée).
5. La tautologie (un élément qualitatif répété ne se transforme pas)¹.

Ainsi, l'équilibre mobile qui caractérise le groupement suppose la réversibilité. Or, selon les physiiciens², la réversibilité est la définition même d'un état d'équilibre. C'est bien dans ce sens qu'il faut concevoir la réversibilité des opérations de l'intelligence achevée.

Les facteurs sociaux du développement de l'intelligence

Piaget constate enfin³ que, de même que le milieu physique ne s'impose pas en une seule fois ni d'un seul bloc à l'intelligence en évolution mais que l'on peut suivre les modes d'assimilation et d'accommodation, très différents selon le niveau du sujet, qui règlent ces acquisitions, de même le milieu social donne lieu à des interactions entre l'individu et son entourage, lesquelles sont extrêmement différentes les unes des autres et dont la succession obéit à des lois. Ces lois se modifient suivant le développement de l'individu.

Voyons ces types d'interaction et ces lois de succession, selon la psychologie de Piaget. Dès le début du stade de la pensée représentative préopératoire, avec l'acquisition du langage, les relations sociales enrichissent et transforment la pensée de l'individu. Ce stade est caractérisé par un déséquilibre entre l'assimilation et l'accommodation. Le petit enfant assimile les influences intellectuelles ambiantes à sa manière. Il les réduit à son point de vue et les déforme donc sans le savoir, du fait qu'il ne distingue pas encore son point de vue de celui des autres, faute de coordination ou de « groupement » des points de vue eux-mêmes. Mais du fait de cette indifférenciation entre l'« ego » et l'« alter », le sujet se trouve exposé à toutes les suggestions et contraintes de l'entourage, auxquelles il s'accommodera sans critique. Piaget résume lui-même cette période : « Les structures propres à la pensée naissante excluent la formation des rapports sociaux de coopération qui seuls entraîneraient la constitution d'une logique : oscillant entre l'égoïsme déformant et l'acceptation passive des contraintes intellectuelles, l'enfant n'est donc pas encore l'objet d'une socialisation de l'intelligence qui puisse en modifier profondément le mécanisme. »

¹ PIAGET, JEAN, *Classes, relations et nombres*, Paris, Vrin, 1942.

² PIAGET, JEAN, *Le mécanisme du développement mental*. Genève, « Archives de psychologie », vol. XXVIII, N° 112, 1942, p. 66.

PIAGET, JEAN, *Le problème neurologique de l'intériorisation des actions en opérations réversibles*, Genève, « Archives de psychologie », 1949, vol. XXXII, N° 128, p. 241.

³ PIAGET, JEAN, *Psychologie de l'intelligence*, Paris, Armand Colin, 1947, p. 187-198.

Aux deux niveaux de la construction des groupements d'opérations, concrètes d'abord puis surtout formelles, se pose le problème des rôles respectifs de l'échange social et des structures individuelles dans le développement de la pensée. Le groupement est-il la cause ou l'effet de la coopération ? Il faut donner deux réponses à une telle question. D'une part, le groupement revient essentiellement à libérer du point de vue égocentrique les perceptions et les intuitions spontanées de l'individu. En effet, sans l'échange de pensée et la coopération avec les autres, l'individu ne parviendrait pas à grouper les opérations en un tout cohérent : le groupement opératoire suppose donc la vie sociale. Mais, d'autre part, les échanges de pensée eux-mêmes obéissent à une loi d'équilibre, laquelle ne saurait être qu'un groupement opératoire, puisque coopérer, c'est encore coordonner des opérations. Le groupement est donc une forme d'équilibre des actions interindividuelles comme des actions individuelles.

Etude psychologique de la règle des signes

Revenons au résultat de l'analyse psychologique de la règle des signes. Nous avons dit que cette règle fait, avant tout, intervenir la réversibilité. Nous savons par l'étude de la théorie opératoire qu'il ne s'agit pas là d'un problème secondaire de l'intelligence, mais de sa caractéristique essentielle. L'étude psychologique de la règle des signes présente donc un intérêt tout particulier.

Or, comme lorsqu'il s'agit de l'intelligence en général, expliquer la question de la règle des signes revient à en tracer le développement chez l'enfant, en mettant en évidence les facteurs assurant le passage d'un stade à un autre.

Si nous comparons les degrés de compréhension de la règle des signes avec le développement de l'intelligence chez l'enfant, tel que l'a décrit Piaget, nous sommes amenée à formuler les hypothèses suivantes :

La pensée représentative préopératoire (de 4 à 7 ans)

L'enfant dont la pensée est égocentrique et constamment liée à l'action du moment, ne réussit pas à réaliser l'équilibre entre l'assimilation des choses aux schèmes de la pensée, et l'accommodation de ces derniers à la réalité. A ce stade, la pensée est irréversible. Dans ces conditions, l'enfant ne pourra pas saisir les opérations réversibles que fait intervenir la règle des signes.

L'enfant ne tient compte que d'une relation; il n'est pas encore capable de multiplication logique, c'est-à-dire de tenir compte de deux relations à la fois. Il ne sera donc pas capable de saisir la règle des signes qui est une multiplication et qui fait par conséquent toujours intervenir plusieurs facteurs simultanément.

Puis, la pensée représentative préopératoire, qui est d'abord dominée par le rapport immédiat entre le phénomène et le point de vue du sujet, évolue en se décentrant peu à peu, s'enrichissant d'autres points de vue. Cette décentration va dans la direction de la réversibilité.

Les opérations concrètes (de 7 à 12 ans)

Le passage au stade concret se marque par une sorte d'équilibre mobile. L'enfant peut dès lors considérer plusieurs rapports simultanément. Il devient donc capable de considérer plusieurs facteurs à la fois et d'exécuter ainsi une multiplication.

Comme nous l'avons vu, l'équilibre mobile est atteint lorsque sont réalisées les conditions nécessaires au groupement, à savoir : la composition, la réversibilité, l'associativité, l'identité et la tautologie. Cet équilibre mobile coordonne tous les points de vue distincts en un système. Il s'agit naturellement toujours d'un équilibre entre l'assimilation des choses à l'action du sujet et l'accommodation des schémas subjectifs aux modifications des choses. La pensée de l'enfant étant dès lors réversible, il pourra saisir la règle des signes, ceci d'autant plus que cette règle implique une multiplication et qu'aussitôt que les groupes additifs seront compris, les groupes multiplicatifs le seront également. Piaget formule cependant deux restrictions :

1. Les enfants sont incapables de ce raisonnement réversible si les données même du raisonnement des opérations de départ n'ont pas été constatées perceptivement, c'est-à-dire lorsqu'il leur faudrait raisonner sur de simples propositions (hypothétiques).

2. Ils peuvent faire ces raisonnements avec certaines notions et pas encore avec d'autres. Ils exécutent par exemple des opérations de conservation ou de sériation lorsqu'il s'agit de matière, dès l'âge de 7 ou 8 ans, tandis qu'il faut attendre qu'un enfant soit âgé de 9 ou 10 ans pour qu'il soit capable de saisir des raisonnements impliquant des poids, et de 10 ou 11 ans pour qu'il sache penser en termes de volume.

Ces deux restrictions devront valoir naturellement aussi pour la règle des signes :

1. L'enfant ne pourra raisonner sur les signes qu'en partant de faits concrets et

2. il parviendra à ces raisonnements plus ou moins tôt suivant les notions qu'ils feront intervenir.

Les opérations formelles (à partir de 12 ans)

A ce stade, il n'est plus nécessaire, constate Piaget, de poser des conditions limitatives. Les opérations réversibles fonctionnent sur des données simplement « assumées » verbalement, donc sur des hypothèses.

L'adolescent se fie ainsi au raisonnement lui-même. La pensée formelle continue à classer, sérier, dénombrer, etc., mais cette fois, elle classe les propositions qui expriment ces relations. Il s'agit donc d'opérations effectuées sur des signes détachés du réel et non plus sur la réalité elle-même. La création mathématique est une illustration de ce pouvoir des opérations formelles, libres à l'égard du monde réel et dépassant même cette réalité pour s'étendre dans l'univers du possible. Mais c'est le rôle qui incombe à la psychologie de l'intelligence que de montrer que les opérations formelles ne peuvent avoir de sens qu'en s'appuyant sur les opérations concrètes dont elles reçoivent leur préparation et leur contenu. La règle des signes pourra donc être saisie sur le plan formel, mais une représentation concrète aidera à la comprendre.

EXPLICATION DE LA FORMATION DE L'INTELLIGENCE

Le problème fondamental de la psychologie opératoire est, comme nous l'avons déjà mentionné, d'expliquer comment la construction de l'intelligence est possible et comment elle s'effectue. Le passage d'un stade génétique à un autre consiste toujours en un passage d'un domaine plus restreint d'équilibre à un domaine plus large. La psychologie opératoire est donc essentiellement une théorie des formes d'équilibre et des passages d'une forme à une autre. Reste à savoir comment se fait le passage d'une forme à une autre. La psychologie opératoire explique ce passage en deux points :

1. Pour assurer la continuité entre les stades successifs du développement, elle fait appel à un fonctionnement commun à tous les niveaux. Comme les structures varient, seules les fonctions (entendues au sens de fonctionnement) peuvent jouer le rôle d'invariant. Toute conduite est d'abord assimilation des objets à l'activité du sujet et accommodation des schèmes subjectifs aux caractères de l'objet. Les schèmes d'assimilation et les formes d'accommodation varient en leur structure, mais les deux fonctions d'assimilation et d'accommodation sont constantes.

2. Le rapport entre les fonctions d'assimilation et d'accommodation se transforme au cours du développement, et c'est ce rapport qui détermine les diverses formes d'équilibre. Ces deux fonctions sont en effet d'abord antagonistes, puis elles finissent par s'appuyer l'une sur l'autre en un équilibre permanent. Cet équilibre permanent consiste essentiellement en une composition mobile puisqu'elle est sans cesse adaptée aux modifications du réel, et surtout en une composition réversible, puisqu'une résultante nulle des modifications virtuelles (= définition même de l'intelligence) implique la composition des modifications directes et inverses.

Ces opérations réversibles que l'enfant est capable d'effectuer indiquent qu'il pourra saisir la règle des signes.

On peut imaginer alors en quoi consiste le passage d'une forme d'équilibre à une autre. Puisque la réversibilité est la forme la plus caractéristique de l'équilibre final, la construction des structures successives de l'action et de la pensée consiste en une réversibilité croissante¹.

HYPOTHÈSES DE TRAVAIL

La règle des signes étant l'expérience la plus directe de la réversibilité, sa compréhension par l'enfant devra se développer au fur et à mesure que ce dernier devient plus âgé et selon le parallèle que nous avons déjà esquissé avec les stades de la psychologie opératoire.

Voici donc en résumé, les hypothèses que nous avons proposées à notre travail expérimental : si la théorie opératoire est exacte, la règle des signes doit être saisie :

1. de façon représentative préopératoire, dès l'âge de 4 ou 5 ans ;
2. sur le plan concret, dès l'âge de 7 ou 8 ans ;
3. sur le plan formel, dès l'âge de 11 ou 12 ans.

Développons un peu mieux ces hypothèses, en précisant ce que nous nous attendions à trouver (toujours en nous basant sur la théorie opératoire de l'intelligence) :

La réversibilité n'étant atteinte qu'à partir de l'âge de 7 ou 8 ans sur le plan concret, et de 11 ou 12 ans sur le plan formel, l'enfant ne semblait pas pouvoir saisir la règle des signes dans son ensemble avant d'avoir atteint 7 ou 8 ans. Avant cet âge en effet, l'enfant ne se place qu'à son propre point de vue, ce qui est insuffisant dans un problème de réversibilité pour lequel il faut évidemment savoir se placer d'abord à un certain point de vue (éventuellement le sien propre), mais aussi au point de vue du résultat auquel on vient d'aboutir pour faire demi-tour à partir de là et revenir au point de départ.

A partir de 7 ou 8 ans, sur le plan concret, l'enfant devrait être capable de saisir la règle des signes dans son ensemble si toutefois celle-ci lui était présentée sous forme de jeu et faisait intervenir des notions qui lui seraient accessibles. Sa pensée étant maintenant réversible, il devrait pouvoir comprendre un problème portant sur cette réversibilité même. Si l'on applique des données quantitatives à ces problèmes, l'enfant devrait encore être capable de les résoudre. En même temps qu'il est capable d'effectuer une addition, il doit être à même de résoudre des multiplications puisqu'il est capable de considérer plusieurs facteurs

¹ PIAGET, JEAN, *Introduction à l'épistémologie génétique*, tome III. Paris, Presses Universitaires, 1950. Voir quatrième partie, ch. XI, 3 : L'explication génétique et opératoire, p. 158-170.

en même temps et que la multiplication n'est en fait qu'une addition dont tous les addendes sont égaux ¹. Dès le stade des opérations formelles (à partir de 11 ou 12 ans), la réversibilité s'exerce indépendamment du contenu des opérations et au-delà du monde réel. La règle des signes devrait donc être saisie à ce stade sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir des opérations concrètes.

PÉDAGOGIE

Il faut que celui qui enseigne connaisse l'enfant, ses besoins, sa capacité de compréhension, sans quoi il ne saurait enseigner convenablement. Dewey ² compare avec raison le maître à un vendeur : « On ne peut pas plus parler de vendre si personne n'achète qu'on ne peut dire enseigner si personne n'apprend; ... dans l'échange éducatif, l'élève bien plus que l'acheteur doit avoir l'initiative. » Aussi, dans notre tentative d'enseigner la règle des signes au petit élève de 5 ans comme au collégien de 15 ou 16 ans, nous sommes-nous sans cesse basée sur les ressources naturelles dont dispose l'enfant et que la théorie opératoire a si bien su mettre en évidence.

Nous inspirant donc de cette théorie, nous avons présenté aux enfants des écoles enfantines et primaires des jeux préparés de telle façon qu'ils les amènent à réfléchir et leur permettent de découvrir la règle des signes, dans la mesure de leur capacité.

Si la psychologie s'est longtemps tenue à l'un ou l'autre des pôles : primat de l'objet ou primat du sujet, la « Gestalt psychologie » et la théorie opératoire ont résolu le dilemme en montrant l'interaction qui les unit. La pédagogie, de même, a sauté d'un pôle à un autre. Il y a quelques générations, la foi était entière dans la culture de l'esprit, tandis qu'ensuite a régné la théorie qui voulait que la présence d'objets matériels fût suffisante pour imprimer les idées aux enfants.

Dans la règle des signes, le point essentiel est l'opération et non pas le symbole. L'action vient en premier : elle est suivie du symbole ou mot qui l'aide à se fixer, qui la caractérise, la résume. Il est nécessaire que la formulation accompagne l'action; elle marque aussi une étape dans le raisonnement. Il ne faut pas oublier, lorsqu'on fait exécuter une action à l'enfant, qu'il lui faudra ensuite intérioriser cette action pour arriver à l'opération. Aussi, l'action que l'on propose à l'enfant doit-elle bien poser le problème et mettre l'accent sur les points importants. Elle doit se présenter de telle façon que l'enfant ne puisse pas se tirer d'affaire par une simple manipulation, mais qu'il soit obligé, tout en manipulant, de faire le raisonnement qu'on attend de lui.

¹ PIAGET, JEAN, *La genèse du nombre chez l'enfant*. Paris, Delachaux et Niestlé, 1941.

² DEWEY, JOHN, *Comment nous pensons*. Paris. Ed. Flammarion, 1925, p. 50.

Disons en résumé que l'enseignement tel que nous l'envisageons ne se propose rien d'autre que de respecter le développement tel qu'il s'effectue spontanément chez l'enfant, tout en le provoquant de manière systématique et dans tous les domaines.

Inutile de dire qu'en cherchant à rendre la règle des signes accessible aux enfants des divers niveaux scolaires, nous avons dû tâtonner et qu'il nous a fallu de longs mois avant d'arriver à une solution convenable. Nos recherches préliminaires n'ont pas été décrites dans ce travail ¹.

EXPÉRIENCES

On peut énumérer de la façon suivante les expériences dont il sera question au cours de notre étude : Les unes illustrent le fait que les signes propres et les signes opératoires sont pratiquement interchangeables ; elles ne font ainsi intervenir que l'une ou l'autre de ces deux sortes de signes. Les autres tiennent compte de la distinction qu'il convient d'établir entre les signes propres et les signes opératoires et font donc appel à ces deux sortes de signes.

Parmi ces différentes expériences, les unes ne font appel qu'au signe moins. C'est en effet la signification du signe moins qui est la plus importante, puisqu'il s'agit d'une inversion. D'autres expériences font intervenir le signe moins et le signe plus.

Certaines de nos expériences, enfin, font intervenir des quantités en même temps que les signes, tandis que d'autres se concentrent sur l'étude des signes seuls.

Quelques expériences ont été présentées sous une forme verbale ; d'autres sous forme de jeux concrets.

Deux de nos expériences, qui font intervenir les signes propres et les signes opératoires, le signe plus et le signe moins, ainsi que des multiplications numériques, sont décrites plus longuement. Nous indiquons les diverses techniques qui ont été adaptées aux différents âges des enfants, soit aux enfants du stade représentatif préopératoire (5-7 ans), du stade concret (7-11 ans) et du stade formel (à partir de 11 ou 12 ans).

Sur la base des expériences les plus caractéristiques de la règle des signes, nous présentons également une étude génétique de la compréhension de cette règle.

Nous décrivons pour terminer quelques expériences plus proches de la pédagogie : ce sont des recherches sur la compréhension de la règle des signes dans nos écoles genevoises du niveau secondaire. Tout d'abord nous avons interrogé les élèves pour nous rendre compte de la compréhension qu'ils pouvaient avoir de cette règle. Nous avons tenté nous-même de l'expliquer à certains d'entre eux qui ne semblaient pas l'avoir

¹ A l'exception de deux d'entre elles : Les poulies et les miroirs, p. 138.

comprise. Sur la base des résultats obtenus (mais avec toutes les réserves qu'implique naturellement la différence entre un enseignement individuel et l'enseignement collectif pratiqué dans les écoles) et sur la base de nos expériences psychologiques également, nous nous sommes permis de faire quelques propositions pédagogiques.

Notre but sera atteint, si des maîtres vérifient ces méthodes et en tirent les données qui pourront leur être utiles.

PREMIÈRE PARTIE

Aperçu des méthodes pédagogiques

Nous croyons devoir commencer notre travail par un aperçu des différentes explications que l'on a données de la règle des signes. Il va de soi que l'on classe toujours les différentes manières d'exposer cette règle selon le point de vue auquel on se place. On pourrait procéder à un classement relevant des mathématiques ¹ : explications algébriques, géométriques, etc. On pourrait songer à un classement philosophique ² : empirisme, rationalisme, etc., ou à un classement psychologique : conventionalisme, symbolisme, etc., ou encore chronologique.

Nous avons adopté, quant à nous, le point de vue psychopédagogique de Piaget.

Pour l'enseignement de la règle des signes, la pédagogie mathématique adopte généralement l'une des trois attitudes suivantes :

I. La méthode verbale. Comme l'indique le terme verbal, cette méthode donne toute l'importance à la parole et aux textes, au maître et au livre.

II. La méthode intuitive. Cette méthode se sert naturellement aussi de mots et de phrases, mais elle insiste sur la nécessité des images, des figures géométriques et des objets. Cette méthode fait ainsi appel aux sens, mais elle laisse cependant encore l'enfant dans une trop grande passivité.

III. La méthode active ou expérimentale. Cette méthode, basée sur la psychologie scientifique, est adaptée à l'enfant. Elle le laisse agir, expérimenter et découvrir par lui-même.

La première de ces trois attitudes comporte deux procédés différents :

A) La simple transmission d'une convention, le maître se contentant d'énoncer la loi devant l'élève.

B) L'explication; le maître s'efforce alors de rendre la règle compréhensible aux élèves.

¹ Nous citons en annexe les explications de la règle des signes données par les mathématiciens : Rolle, Euler, Maclaurin et Boutroux.

² Nous citons en annexe l'explication d'un philosophe : Brunschvicg.

Du point de vue historique, la méthode verbale a été seule en vigueur jusqu'à la fin du XIX^e siècle. A ce moment, la méthode intuitive s'est juxtaposée à elle. Depuis une quinzaine d'années, une troisième méthode, expérimentale cette fois, se fraie petit à petit un chemin. Cependant on trouve actuellement toutes les attitudes. Pour certains mathématiciens, le verbalisme n'a rien perdu de son autorité, tandis que chez la plupart d'entre eux la méthode intuitive est très hautement estimée.

Du point de vue de la pédagogie scientifique, il est curieux de voir le rôle prépondérant qu'on accorde encore à l'avis personnel : le professeur de mathématiques propose ce qui lui semble bon ! Pourtant ici et là, un pédagogue s'intéresse vivement à la question, se soumet aux exigences scientifiques, révisé ses positions et publie peut-être un article. Des maîtres font des expériences scientifiques sur leurs classes, éprouvent les différentes explications auxquelles on peut avoir recours, et ne retiennent que celles d'entre elles dont les résultats expérimentaux sont satisfaisants.

Voyons chacune de ces attitudes de plus près, en apportant pour chacune d'entre elles quelques citations.

Remarquons que nous laissons de côté l'époque où l'on négligeait les nombres négatifs et par conséquent la règle des signes. L'exemple du mathématicien Rolle est caractéristique à cet égard, nous le citons en annexe.

I. MÉTHODE VERBALE

A. SIMPLE ÉNONCÉ D'UNE CONVENTION

Les pédagogues qui se contentent de donner la loi aux élèves et qui la leur font généralement apprendre par cœur, motivent souvent leur attitude par le fait que les élèves ne sauraient comprendre les explications. Nous citons :

Bourlet (Paris 1896), Lörcher (Stuttgart 1912), Estève (Paris 1926), Addor (Lausanne 1926), qui se contentent de faire suivre l'énoncé de la loi d'un exemple pour chacune des quatre formes de la règle des signes. (Voir textes de ces auteurs en annexe.)

Ces pédagogues se donnent pour tâche de transmettre à leurs élèves les connaissances accumulées au cours des siècles, de meubler leur mémoire tout en leur faisant exécuter des exercices. Les élèves sont tenus dans une soumission complète et passive, sans contact intellectuel entre eux.

Butler définit le verbalisme comme étant la mémorisation de mots sans compréhension de leur signification et le critique en ces termes :

« Le plus souvent la mémorisation n'est que la simple répétition de mots dont on ne comprend pas la signification. Souvent cette simple répétition donne le change même au maître qui s'imagine que ce flot de paroles est accompagné d'un flot d'idées. Si la pensée trouve les mots propres à son expression, alors ces mots ont atteint leur but, mais une simple mémorisation de mots implique rarement ou même jamais la pensée. Le verbalisme, lorsqu'il se substitue, pour le maître et les élèves à un véritable enseignement, empêche finalement l'élève de comprendre, de retenir et d'utiliser ce qu'il a appris. Toute étude qui manque de ces trois qualités est vouée à un rapide oubli. Et pourtant les élèves auront recours au verbalisme si les maîtres ne dirigent pas sagement leur étude et n'exigent pas un travail qui révèle tout d'abord compréhension et interprétation. ¹ »

La vérité de ces remarques trouvera sa confirmation dans notre Troisième partie, où nous décrivons les résultats de quelques interrogatoires de personnes auxquelles on n'avait jamais expliqué la règle des signes. Nous verrons que si la règle des signes est relativement facile à mémoriser, elle est d'autant plus vite oubliée. On peut aisément se rendre compte de ce fait en interrogeant ceux de notre entourage qui n'ont plus entendu parler de cette règle depuis le temps de leurs études.

B. EXPLICATIONS

Les professeurs qui emploient cette méthode estiment que la structure mentale de l'enfant est la même que celle de l'adulte. Pour eux, l'enseignement doit comporter une logique, et la logique étant liée au langage ou tout au moins à la pensée verbale, un enseignement verbal est censé suffire à constituer cette logique. Il faut enseigner aux élèves le langage symbolique abstrait par lequel s'expriment les mathématiques. Cette méthode donne lieu à toute une série d'explications, des plus brèves aux plus détaillées.

Citons dans cet ordre d'idées quatre différentes méthodes d'explication mathématique, l'une faisant appel à des polynômes, une autre à des signes contraires, une autre au principe de permanence et l'autre enfin à l'addition et à la soustraction.

1. Polynômes

Voici tout d'abord quelques exemples d'explications faisant intervenir des polynômes. On se souvient que toute quantité algébrique qui ne renferme aucun signe $+$ ou $-$, s'appelle monôme. Quand plusieurs monômes sont unis entre eux par l'un des signes $+$ ou $-$, l'expression qui en résulte est appelée polynôme.

¹ BUTLER, F. A., *The Improvement of teaching in secondary schools*. Chicago, Illinois, 1939, p. 278.

La règle des signes intervient dans la multiplication des polynômes. Pour multiplier deux polynômes, on multiplie généralement chaque terme d'un polynôme par chaque terme de l'autre polynôme, et on fait la somme algébrique des produits partiels ainsi obtenus. Ce procédé de multiplication peut être appelé « méthode de la fusée ». En procédant ainsi, chaque produit partiel est positif ou négatif, suivant qu'il est le produit de membres ayant les mêmes signes ou des signes contraires. Exemple : $(9 - 6) (5 - 2) = 45 - 18 - 30 + 12 = 9$.

Raupbach (Breslau 1815) donne d'abord des polynômes à résoudre et passe sans transition à la règle des signes. Krakowski (Zurich 1944) donne des exemples dans lesquels un des facteurs est nul, puis un autre exemple pour chacune des quatre formes de la règle des signes. Mais on ne peut guère encore parler d'explication; l'auteur se contente de procéder logiquement dans l'exposé des différentes questions qu'il enseigne à ses élèves. Il sous-entend que si les élèves ont vu des polynômes, la règle des signes ne leur fera aucune difficulté. Henrion (Paris 1621), fait déjà suivre l'énoncé de la règle de polynômes numériques.

De Camberousse (Paris 1884) fait constater verbalement le passage des polynômes à la règle des signes, mais toujours d'une manière très peu explicative. Vœlmy et Mautz (Zurich 1947) invoquent simplement la propriété commutative ¹ pour la troisième forme de la règle des signes $(+.-)$ et l'ancienne règle du polynôme $(a-b)(c-d)$ pour la quatrième forme.

Jacquemoud (Genève) est plus explicite quoique encore extrêmement bref. Tout d'abord, comme Vœlmy et Mautz, il se base sur la propriété commutative pour la troisième forme de la règle $(+.-)$ puis, pour la quatrième forme, il donne un polynôme numérique, en le traitant de deux manières : en multipliant chaque terme d'un polynôme par chaque terme de l'autre polynôme et par la méthode qui consiste à calculer d'abord l'intérieur des parenthèses pour procéder ensuite à la multiplication.

2. Signes contraires

Voici quelques exemples de méthode verbale procédant par les changements de signes ou signes contraires. Grévy (Paris 1909) ne fait que constater que le produit du vecteur unité par un nombre est un vecteur de même sens si le nombre est positif et de sens contraire si le nombre est négatif.

Borel (Leipzig-Berlin 1919) invoque la propriété commutative pour la troisième forme de la règle des signes, mais estime que la quatrième

¹ Il s'agit du même principe qui veut que la valeur d'une somme ne change pas si l'on change l'ordre de ses addendés.

forme a besoin d'une plus ample explication. A cet effet, il donne des exemples de la vie de chaque jour, exemples qui ne sont pas intéressants, car ils ne représentent que les nombres positifs et négatifs (années avant et après J.-C.) et n'aident donc pas à la compréhension de la règle des signes. Ayant fait constater que dans la troisième forme on obtient le produit de -5 et $+3$, en multipliant d'abord par le nombre positif 5, puis en donnant le signe contraire au résultat, il déclare qu'il faut procéder de la même façon pour la quatrième forme. Ce procédé est clair.

Heilermann (Essen 1912) donne ce qu'il appelle une preuve, pour la quatrième forme de la règle, en passant par l'opération additive : — ($-a$) b , et sans y ajouter de commentaires.

3. Principe de permanence

Un certain nombre de pédagogues évoquent un principe de permanence, en allemand : Permanenzprinzip. Voici ce principe : « Lorsque deux formes, exprimées dans les symboles courants de l'arithmétique générale, sont égales entre elles, elles doivent encore le rester lorsque les symboles cessent de désigner des grandeurs simples et que de ce fait les opérations reçoivent un autre contenu quel qu'il soit. ¹ »

Bützberger (Zurich 1920) déclare que si le multiplicateur est un nombre négatif, la définition de la multiplication qu'on a donnée jusqu'ici ne suffit plus, qu'elle n'a plus de sens. Il faut la remplacer par une nouvelle définition qui s'accorde avec la précédente et n'amène aucune contradiction. Ce nouveau principe, Hankel (Leipzig 1867) l'a nommé principe de permanence ou de non-exception. Il résume le procédé d'Euler (que nous citons en annexe) par changements de signes ou signes contraires et recommande également qu'on se serve de représentations géométriques dont il nomme deux ou trois possibilités.

Fladt Kuno (Francfort 1950) écrit à propos des multiplications des nombres relatifs que ce sont des axiomes qu'on ne peut pas prouver. Il ajoute que ce fait ne peut pas être saisi par l'élève. Il faut que l'élève puisse se baser sur le principe de permanence qui implique que les lois de calcul étudiées restent valables. De l'enseignement du maître, l'enfant doit déduire que c'est là un miracle.

Schubert (Leipzig 1899) déclare que le produit dont le multiplicateur est nul n'a pas de sens. En appliquant le principe de permanence ou de non-exception on donne pourtant un sens à ce produit. Il s'agit de conserver aux lois leur valeur. On atteint ce but en considérant le zéro et les nombres négatifs comme des différences. En réalité, Schubert, comme Bützberger et Fladt Kuno, n'explique rien du tout ; il se contente

¹ HANKEL HERMANN, *Theorie der Complexen Zahlensysteme*. Leipzig, Leopold Voss, 1867, I. Teil, p. 10-17.

de parler de principe de permanence, et de donner ainsi un prétendu sens à la multiplication dont le multiplicateur est négatif.

Breidenbach enfin (Stuttgart 1950), déclare que la troisième et la quatrième forme de la règle des signes n'ont aucun sens. Pour la troisième forme, les élèves s'aident en intervertissant naïvement les facteurs. Pour la quatrième forme, ce moyen échoue. Quelquefois les élèves se rapportent aux produits de deux différences, mais ils ne peuvent naturellement pas trouver par eux-mêmes la vraie nature des choses.

On dit que les formes 3 et 4 sont des définitions que nous prenons en toute liberté, lorsque nous nous plaçons, en toute liberté également, sous la loi de permanence de Hankel ! C'est par économie que nous désirons que les lois précédentes soient encore valables pour les nombres négatifs.

Puis Breidenbach propose une autre explication sous la forme d'exemples d'une suite de multiplications dans lesquelles l'un des facteurs diminue ou augmente chaque fois de deux unités tandis que le résultat diminue ou augmente de six unités. Ce second moyen n'est pas plus explicatif que le premier; ces deux moyens constituent tout simplement un passage sans contradiction de la multiplication de deux quantités positives à la multiplication de deux quantités négatives. (Voir en annexe les citations de ces auteurs.)

4. Addition et soustraction

Passons au groupe d'explications qui se basent sur l'addition et la soustraction.

Lacroix (Paris 1818) propose des polynômes et donne une explication par des parties additives et soustractives. Sauri (Paris 1774) discute également la multiplication des polynômes et s'exprime plus clairement encore, à propos des parties à enlever ou à ajouter.

Manning (Cambridge 1796) commence par parler de multiplications dont l'un des facteurs contient des termes positifs et des termes négatifs. Il discute le cas de la quantité composée de $x-y$ dans laquelle on ignore si c'est x ou y qui est le plus grand. Il déclare, pour terminer, que les multiplications par des quantités négatives peuvent être définies comme suit : « soustraire le multiplicande aussi souvent qu'il y a d'unités dans le multiplicateur ». Cette définition selon lui est acceptée par tous ceux qui ont écrit sur l'algèbre et admettent les quantités négatives. (Les textes de ces auteurs sont cités en annexe.)

La méthode verbale, telle que nous venons de l'illustrer par ces diverses explications de la règle des signes, comporte un exposé aussi logique que possible de la question, comme si la logique était innée chez l'enfant, comme s'il comprenait d'emblée et si sa pensée toute constituée ne demandait qu'à être exercée. Or la psychologie a montré que la logique

n'est pas innée et que l'enfant ne peut pas rester passif, mais qu'il doit bien au contraire agir pour acquérir les éléments indispensables à son développement. Enfin, comme le souligne Piaget ¹, l'évolution de la raison dépend étroitement des facteurs sociaux; l'apport héréditaire ou acquis ne suffit point à conduire d'elles-mêmes les intelligences individuelles au niveau rationnel.

Hubert en fait une critique très judicieuse. Nous la résumons : Ces méthodes didactiques sont fondées sur l'autorité du maître. L'enseignement se donne ex cathedra, par la parole impérative, par l'argumentation démonstrative et par le livre. Il suppose la passivité de l'enfant, symbolisée par l'attitude d'immobilité qui lui est imposée. Cet enseignement tend à prendre la forme abstraite et schématique. Si le maître cherche à se mettre à la portée de l'enfant, il pense y parvenir en allant tout droit à ce qui constitue pour lui l'essentiel, le simple, le général, qui est ce que l'enfant saisit en dernier lieu. Les étapes de son exposition suivent un ordre auquel l'enfant est peu sensible. A cette logique du maître correspond chez l'enfant ce qui lui est le plus néfaste : la mémorisation. « Comme ce dernier n'est pas spontanément porté à retenir les connaissances qui lui sont ainsi communiquées, parce qu'elles ne s'incorporent pas à sa propre vie et qu'il n'a aucune occasion pratique de s'en servir, il lui faut en charger sa mémoire et l'entraîner spécialement à cet effet. Peu à peu se prend l'habitude de dissocier les comportements verbaux et les comportements réels, de substituer les premiers aux seconds, d'admettre qu'ils suffisent à tout, de croire qu'on a agi, qu'on a senti, qu'on a pensé même parce qu'on a parlé. Quand la mémorisation verbale est l'effet le plus constant de l'enseignement, c'est alors que le langage ne sert pas tant à exprimer la pensée qu'à dissimuler la pensée et même l'absence de pensée. Un seul remède : l'oubli, dont l'élève soumis à ce régime ne se fait pas faute d'user. ² »

Zadou-Naiski s'exprime, lui aussi, très clairement à ce sujet : « Le défaut général de notre enseignement scientifique traditionnel consiste à vouloir imposer trop vite la théorie et l'abstraction à l'intelligence de l'enfant, sans lui permettre d'accumuler les nombreuses expériences et opérations concrètes qui servent de matériaux à la pensée théorique. L'enfant se voit entraîné dans le courant d'une logique qui le dépasse

¹ PIAGET, JEAN, *Remarques psychologiques sur le travail par équipes*. Genève, Bureau International d'Education, N° 39, 1935, p. 179-196.

² Hubert ajoute que l'une des raisons pour lesquelles les langues mortes et les mathématiques ont une place prépondérante parmi les autres disciplines provient du fait qu'elles se prêtent le mieux à l'emploi des mémorisations mécaniques, car la pensée n'est pas appelée à élaborer les symboles algébriques ou les règles de syntaxe dont on lui enseigne le maniement. Hubert fait remarquer qu'il y a dans les mathématiques et les langues classiques une autre vertu, mais qu'il faut aussi une autre méthode d'enseignement pour y atteindre.

HUBERT, RENÉ, *Traité de pédagogie générale*. Paris, Presses Universitaires de France, 1946, p. 500-503.

constamment : on lui apporte les solutions des problèmes qu'il n'a pas le temps de se poser; il ne sait jamais où il en est, où il va, pourquoi telle question succède à telle autre, quelle est la raison d'être de systèmes de convention ou de tel nouveau concept. Il n'y a pas de meilleur moyen pour lui donner de la pensée scientifique une idée définitivement faussée. ¹ »

Bloch définit l'école traditionnelle en disant qu'elle ignore l'enfant et travaille sans tenir le moindre compte de ses tendances et de ses intérêts, tels que l'observation spontanée suffit à les révéler et que la psychologie génétique les détermine systématiquement. ²

II. MÉTHODE INTUITIVE

Les auteurs que nous avons classés dans ce deuxième groupe font appel à l'intuition sous forme de représentation imagée, de figures ou d'objets. Cette méthode fait intervenir le concret, le visible, le tangible.

Pierre Boutroux donne une brève définition de la méthode intuitive : « Certains mathématiciens, préoccupés d'opposer à la présentation abstraite du raisonnement mathématique, celle qui utilise le secours de l'imagination, ont affirmé la nécessité de faire appel à l'intuition dans l'enseignement de la science : c'est de l'intuition des sens que voulaient parler ces savants, de celle qui intervient lorsqu'on interprète par l'image ou par d'autres figurations concrètes les propositions théoriques de la science. ³ »

L'importance de ces données concrètes est reconnue par les auteurs que nous citerons. Il convient cependant de souligner la manière dont ils s'en servent. Car, comme l'ont montré la psychologie de Piaget et la pédagogie psychologique d'Aebli, tout le succès de l'enseignement dépend de la forme que l'on donne à l'exécution des opérations. L'enseignement intuitif place les élèves dans une situation de spectateurs plus ou moins intéressés. Il est en effet vérifié que les élèves portent à l'enseignement un intérêt directement proportionnel au degré d'activité qu'on leur permet de déployer. Comme le dit Aebli, leur intérêt est plus grand s'ils peuvent résoudre un problème eux-mêmes par une recherche personnelle que s'ils doivent assister à la démonstration de sa solution;

¹ ZADOU-NAISKY, G., *Le travail manuel et l'enseignement des sciences exactes*. « L'école nouvelle française », N° 52, Paris 1951, p. 77-78.

² BLOCH, M. A., *Philosophie de l'éducation nouvelle*. Paris, Presses Universitaires de France, 1948, p. 15.

³ BOUTROUX, PIERRE, *L'idéal scientifique des mathématiciens*. Paris, Félix Alcan, 1920, p. 215.

cet intérêt est plus grand s'ils peuvent agir sur des données concrètes que s'ils doivent se les représenter ou les suivre en spectateurs.

Les auteurs que nous allons citer, caractéristiques représentants de cette méthode intuitive, ne demandent pas à l'élève d'agir, mais le laissent au contraire dans une complète passivité.

Citons en premier lieu Spicher (Genève 1941) qui déclare que multiplier un nombre algébrique par un autre, c'est, suivant les cas, compter le nombre dans son sens propre ou dans le sens contraire à son sens propre. Il fait un croquis pour chacune des quatre formes de la règle des signes.

Lietzmann (Leipzig 1916) commence par déclarer que les quatre formes de la règle des signes sont des définitions dont l'utilité est évidente dans la multiplication des polynômes. Quant à l'explication de ces définitions, il l'estime très ardue. Si l'on se repose sur le principe de permanence, tout est bel et beau. Dès que l'on aborde une représentation, c'est plus difficile et les difficultés sont même si grandes qu'on renonce souvent à les donner aux classes moyennes. Il propose tout de même des représentations graphiques, en géométrie analytique, en s'efforçant ensuite de rendre la chose plausible, d'une manière purement arithmétique. Pour la troisième forme, il fait intervenir la propriété commutative de la multiplication, et pour la quatrième forme, se contente de remarquer qu'il faut également changer de signe. Nous avons déjà parlé de ce procédé à propos du groupe d'explications verbales. Mais, estimant que ce genre d'explication est trop abstrait pour certains élèves, il propose une suite de multiplications décroissantes. Il critique enfin le principe de permanence lorsqu'il est considéré comme preuve sérieuse.

Renneberg (Berlin-Leipzig 1947) parle d'axiome et de principe de permanence, mentionnant Hankel et Max Simon. Il signale le fait que des jeunes gens éveillés demandent la « preuve » du $- \cdot - = +$. Aussi faut-il leur donner des éclaircissements qui leur permettent de comprendre. Il s'agit cependant de ne tromper ni nos élèves, ni nous-mêmes : il n'y a pas de « preuve », mais des fondements qui justifient la définition. Renneberg ajoute qu'on peut encore, après coup, dans les classes supérieures, revenir sur les produits de nombres négatifs et les éclairer avec de nouveaux moyens. Puis il propose quelques explications qu'il classe dans l'ordre de leur difficulté, en soulignant pour commencer que : la première et la seconde forme de la règle des signes sont basées sur l'addition et la soustraction, la troisième forme sur la propriété commutative de la multiplication ; quant à la quatrième forme, par comparaison avec la troisième et la première qui ont un multiplicateur négatif, elle doit avoir le signe du multiplicande inversé. Renneberg donne une autre explication dont nous avons également parlé : une suite décroissante de multiplications. Enfin pour la forme $- \cdot - = +$ il propose des poly-

nômes numériques, qu'il résout comme nous l'avons déjà vu faire, soit en multipliant chaque terme d'un polynôme par chaque terme de l'autre polynôme pour faire la somme des produits partiels ainsi obtenus, soit en calculant d'abord l'intérieur des parenthèses.

Il constate que les élèves veulent mettre les nombres négatifs en relation avec la réalité; il donne un bon exemple pour la soustraction et passe à la multiplication avec le nombre (-1) mais, cette fois, en ne donnant plus d'exemples pris dans la réalité. Il montre que $-$ ne peut pas évaluer $-$ parce qu'alors $(-3) \times - = -12$ aurait deux solutions.

Jusqu'ici toutes les explications de Renneberg sont restées sur le plan verbal. Suivent quatre explications qui s'accompagnent de croquis. La première se base sur la propriété distributive de la multiplication qui peut être représentée géométriquement. La seconde fait intervenir des surfaces et convient spécialement aux élèves doués en géométrie. La troisième concerne la représentation graphique de la fonction et ne peut naturellement être saisie que par des élèves du 8^e degré. Il estime enfin qu'on peut fournir un fondement à la règle $-$ par $- = +$ devant des élèves de la 11^e classe, en géométrie analytique.

Vera Sanford (New-York 1951) dans ses notes sur l'Histoire des mathématiques donne un aperçu des explications de la règle des signes et cite de nombreux auteurs qui sont restés sur le plan purement verbal. Elle donne enfin quelques exemples concrets de la règle des signes.

Lefebure (Namur 1897) donne tout d'abord une explication verbale de l'ordre de celles que nous avons déjà mentionnées : le multiplicateur positif $+ b$ indique par définition qu'il faut prendre b fois par voie d'addition la quantité soit positive, soit négative, désignée par le multiplicande; le multiplicateur $- b$ indique par définition qu'il faut prendre b fois par voie de soustraction la quantité du multiplicande.

Puis il propose une application qui donne, sous une forme verbale encore, mais faisant appel déjà à des images concrètes, chacune des quatre formes de la règle des signes. Dans cet exemple il s'agit d'un train ayant parcouru et parcourant encore un certain trajet. Les signes propres et opératoires sont représentés, les uns par le temps, les autres par la direction; les signes positifs trouvent leur représentation dans le temps à venir et dans la direction de A vers B , tandis que les signes négatifs la trouvent dans le temps écoulé et dans les longueurs parcourues en sens contraire, soit de B à A . Lefebure a même accompagné chacune des quatre formes de la règle des signes, d'une multiplication numérique.

Margot (Lausanne 1925) donne également un exemple concret sur le plan verbal. Cet exemple comporte les quatre formes de la règle des signes, avec multiplication numérique et la représentation des signes propres et opératoires : chaleur ou froid, ainsi que les signes positifs et

négatifs : température s'abaissant et s'élevant. Cette méthode exige cependant un changement du point de départ, selon qu'il s'agit de froid ($- 8^{\circ}$) ou de chaud ($+ 10^{\circ}$).

Fouché (Paris 1952) déclare qu'il vaut mieux, plutôt que de faire un raccordement technique de la multiplication des nombres algébriques avec les théorèmes d'arithmétique relatifs aux produits de sommes et de différences, présenter cette multiplication comme un raccordement d'habitudes ne constituant pas une véritable démonstration. Il suppose le thème algébrique suivant : ajouter deux gains de 100 francs et supprimer trois pertes de 50 francs à ce qui est en caisse. Il se borne ainsi à donner la première et la quatrième forme de la règle des signes et constate que ces deux formes équivalent à un gain. Cette façon de présenter le problème est la même que celle que nous avons utilisée dans nos expériences sur l'équivalence. Les signes propres et les signes opératoires, de même que les signes positifs et les signes négatifs, sont représentés par le double couple de possibilités suivantes : ajouter ou supprimer une perte ou un gain.

Ott (Zurich 1951), dans un long article intitulé « Moins fois moins égale plus », traite assez brièvement de la multiplication : Il déclare que de bons exemples sont nécessaires et en donne un de Lietzmann qui fait intervenir les signes propres et opératoires, ainsi que les signes positifs et négatifs sous forme d'additions et de soustractions de pas, soit vers la droite, soit vers la gauche. Ou encore l'exemple de l'automobile qui roule à une vitesse de 20 m/sec. soit vers la droite soit vers la gauche. Cet exemple est plus clair que le précédent ; il fait intervenir des formules numériques et des signes pour chacune des quatre formes de la règle des signes, mais on ne voit pas cependant comment les signes propres et opératoires, positifs et négatifs, sont représentés.

Ott cite ensuite de beaux exemples de Locher : tout d'abord un problème de gains et de dettes par rapport à des jours situés dans l'avenir. Mais ici encore, les formules numériques comportant les signes de chacune des quatre formes de la règle sont peu explicites. Au lecteur d'imaginer la représentation tant des signes propres et opératoires que des signes positifs et négatifs. Il donne ensuite l'exemple d'un levier qui représente assez bien, mais d'une façon encore verbale, l'expérience de la balance.

Puis il passe à une méthode qu'il dit être moins représentative, autrement dit qui abandonne tout exemple ou image ; c'est ainsi qu'il donne la seconde forme de la règle des signes simplement sous forme d'addition. Quant à la solution de la troisième forme, il propose deux méthodes : les suites décroissantes de multiplications et la propriété commutative de la multiplication (qu'il utilise sans la nommer). Pour la quatrième forme enfin, il remarque que multiplier par $-$ implique une inversion de signe.

Renneberg a publié en 1951, un article qui marque, du point de vue pédagogique, un réel progrès sur celui de 1947 que nous avons déjà commenté. L'introduction est déjà très claire. Renneberg montre d'emblée qu'il y a quatre combinaisons possibles des signes dans la multiplication; il donne deux méthodes qui peuvent servir à introduire la règle; tout d'abord un cas pratique, puis une démonstration purement arithmétique, c'est-à-dire verbale.

Le cas pratique est complet. Les signes propres et opératoires sont représentés d'une part par les directions qui peuvent être positives et négatives et d'autre part par le temps futur qui est considéré comme positif et le temps passé qui est considéré comme négatif. Renneberg ajoute un croquis à son explication. Du fait que dans cet exemple, dit-il, les produits abstraits de nombres relatifs s'accomplissent dans le réel, cette méthode se différencie beaucoup du formalisme des méthodes purement mathématiques. La didactique nouvelle s'efforce justement de donner un sens à la multiplication de nombres relatifs. D'une façon générale, on se sert de l'exemple de la fortune et des dettes pour rendre la règle plus claire.

Après cette application pratique, Renneberg revient à l'explication mathématique. Il invoque le principe de permanence. Pour la première forme, on peut regarder les nombres positifs comme des nombres naturels. La seconde forme peut être considérée comme une addition réitérée. Pour la troisième forme on invoque la propriété commutative. Quant à la quatrième forme, en comparant deux différents cas, on se rend compte que lorsque le multiplicateur est négatif, le produit change de signe; cela doit être encore valable pour la quatrième forme de la règle.

Il propose encore quelques explications pour la quatrième forme, qui est difficile à saisir. Tout d'abord la méthode des suites de multiplications décroissantes : lorsque le multiplicateur décroît d'une unité, le produit croît de quatre unités. Puis un exemple numérique de polynômes que l'on peut naturellement calculer de deux manières : soit en multipliant chaque terme d'un polynôme par chaque terme de l'autre, soit en exécutant les soustractions à l'intérieur des parenthèses avant de dégager le produit. Enfin un exemple tiré de la géométrie, qui fait intervenir la propriété distributive; cet exemple est accompagné d'un croquis.

Comme on le voit, la méthode intuitive représente déjà un progrès sur la méthode verbale, mais on peut se demander si l'enfant pourra généraliser ou s'il restera attaché à des structures particulières. Le souci essentiel du professeur est bien de concrétiser la règle et de se mettre ainsi à la portée des élèves. Mais la psychologie expérimentale a montré que l'action de l'enfant a une valeur primordiale pour le développement de sa pensée. Il nous faut donc bien constater que cette méthode a tort de ne pas en tenir compte.

Nous ne sommes pas seule à penser ainsi; c'est ainsi qu'Hubert estime que les méthodes intuitives représentent par rapport aux méthodes verbales, un progrès moins considérable qu'on ne l'a jugé parfois. « Ce que ces méthodes reprochent au didactisme, c'est l'abus de l'abstraction, du raisonnement, du verbalisme. Mais à les prendre au pied de la lettre, elles n'impliquent pas moins de passivité dans l'esprit de l'élève que les procédés auxquels elles sont opposées. Elles substituent simplement à l'autorité du maître et de la parole l'autorité des choses et de la perception.

Leurs partisans croient en effet faire une très large part à l'observation psychologique en proclamant que l'enseignement offert à l'enfant doit s'adresser premièrement aux sens, débiter par le concret, le visible, le tangible, pour s'élever de là aux relations abstraites, et que les représentations se fixent d'autant mieux dans la pensée qu'elles sont faites d'images groupées selon leurs relations dans l'expérience.¹ »

Cette méthode fait également l'objet des critiques d'Aebli, qui se base comme nous sur la psychologie opératoire de Piaget.

Elle est fondée, selon lui, sur une psychologie qui trouve l'origine de toutes les idées dans le monde sensible et n'attribue au sujet qu'un rôle insignifiant dans leur acquisition. Il se demande quelle est la valeur de cet enseignement intuitif qui est rendu inopérant par la passivité de l'élève. Il faut toujours que la donnée sensible soit soumise à une activité, sans quoi on ne provoque jamais l'acquisition d'une nouvelle notion. Etant donné que les notions ne sont pas acquises par impression passive, la didactique doit s'orienter dans une autre direction.

Il faut cependant reconnaître le côté positif de cette didactique intuitive qui constitue un progrès immense sur l'enseignement verbaliste. Elle remplit en effet une des conditions indispensables à l'acquisition de la plupart des notions et opérations en faisant accompagner l'enseignement de données intuitives, telles que des figures géométriques, des croquis, des illustrations ou des objets².

III. MÉTHODE ACTIVE

Les attitudes verbales et intuitives dont nous avons parlé ne font pas appel à l'activité de l'enfant. Aussi, du point de vue pédagogique auquel nous nous sommes placée dans cet ouvrage, ces deux méthodes sont insoutenables dans l'état actuel des connaissances.

¹ HUBERT, RENÉ, *Traité de pédagogie générale*. Paris, Presses Universitaires de France, 1946, p. 508-509.

² AEBLI, HANS, *Didactique psychologique*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1951.

Remarquons qu'Hubert dans son *Traité de pédagogie générale* adopte ce même classement des théories pédagogiques. Au début de son chapitre sur les méthodes actives, il fait allusion à Ferrière qui a constaté que c'est la défectuosité de l'enseignement didactique (nous disons : verbal) et l'insuffisance des méthodes purement intuitives, quand on les a confrontées avec les premières conclusions de la psychologie expérimentale, qui ont conduit à recourir aux méthodes dites actives¹. Hubert ajoute entre autres que les méthodes actives s'opposent radicalement à tout ce qu'il y a de passif dans les procédés verbaux et intuitifs.

Aucun sujet pédagogique n'a donné lieu, et ne continue à donner lieu à autant de commentaires que celui des méthodes actives. On a analysé les œuvres des grands pédagogues; on a examiné toutes les nuances du terme; on a montré enfin à quel contresens cette notion a parfois abouti². Piaget a discuté les auteurs les plus importants et les plus représentatifs de ces méthodes nouvelles³, en les classant en deux séries : ceux dont les méthodes sont fondées sur les mécanismes individuels de la pensée et ceux qui se basent sur la vie sociale de l'enfant⁴. Piaget résume l'ensemble des théories en disant que l'idéal de toute école active est de trouver un équilibre satisfaisant entre l'individualisation et la socialisation de l'enseignement. Nous avons invoqué plus haut le problème de la coopération⁵. L'importance de cette question a été mise en évidence par Aebli, qui a étudié le problème des méthodes pédagogiques, de l'individualisation de l'enseignement ou de la coopération entre élèves, sur la base de la psychologie opératoire. Rappelons enfin le grand travail qui s'accomplit à l'école expérimentale du Mail, ainsi que les publications de son directeur⁶.

Selon Piaget, le point central des méthodes actives se trouve dans la construction spontanée. Il ne s'agit pas d'inculquer les notions à l'enfant par des méthodes intuitives ou verbales. L'essentiel n'est pas dans la façon dont le maître envisage son enseignement, mais dans la liberté qu'il laisse à l'enfant pour construire ses opérations spontanément. Il s'agit d'une véritable redécouverte par l'enfant, d'une construction des lois et de la vérité. Le rôle du maître consiste surtout à procurer à

¹ HUBERT, RENÉ, *Traité de pédagogie générale*. Paris, Presses Universitaires de France, 1946, p. 514.

² Voir par exemple : BLOCH, M. A., *Philosophie de l'éducation nouvelle*. Paris, P.U.F., 1948, p. 28 à 38, qui s'est efforcé « de montrer ce qu'il faut entendre et aussi ne pas entendre par là... ».

³ *Encyclopédie française*, tome XV, fascicule 28, p. 1 à 13.

⁴ Cf. HUBERT, R., *Traité de pédagogie générale*. Paris, P.U.F., 1946, p. 216, qui se base sur le classement de Piaget.

⁵ P. 19-20. Voir également : PIAGET, JEAN, *Remarques psychologiques sur le selfgovernment*. Genève, Publication du Bureau international d'Éducation, N° 38, 1934, p. 89-108.

⁶ DOTRENS, ROBERT, *L'enseignement individualisé*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1947.

l'élève le matériel qui lui est nécessaire et à prendre garde de ne suggérer que l'indispensable.

L'enfant qui a étudié un problème selon cette méthode pourra toujours le redécouvrir; il sera moins enclin à oublier la solution qu'il a découverte par un raisonnement personnel.

NIVEAU SECONDAIRE

Il faut cependant reconnaître que ces problèmes dépassent notre sujet. Comme nous l'avons dit tout au début de notre travail et comme le constate entre autres Hubert : « Les méthodes actives se sont introduites tout d'abord dans les écoles maternelles, parce que les déficiences de l'enseignement traditionnel étaient trop évidentes à ce stade, et parce que c'est aussi sur cette phase de la croissance mentale qu'ont porté les premières initiatives expérimentales. » Et plus loin : « Une erreur assez communément répandue consiste à penser que les méthodes actives ont sans doute leur pleine et légitime application dans l'enseignement élémentaire, mais que l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, ayant de tout autres fins, ne sauraient s'accommoder des mêmes procédés. ¹ »

Il en résulte que les méthodes actives n'ont pas encore pénétré profondément l'enseignement secondaire². Si des sujets précis ont fait l'objet d'enquêtes nombreuses au niveau primaire (telle la question des fractions par exemple), on en est encore au stade des généralités et des échanges de vues préliminaires dans l'enseignement secondaire. Brunold, directeur général de l'enseignement du second degré en France, lors du stage des chefs d'équipe des classes nouvelles, en septembre 1951, s'exprimait ainsi : « Si les classes nouvelles nous ont apporté tant d'intéressants résultats, elles ont mis en évidence la fécondité des méthodes actives. Ces méthodes, certes, n'étaient pas nouvelles. L'enseignement du premier degré les utilise depuis fort longtemps. Bien des maîtres de nos lycées et collèges se sont, d'instinct, éloignés de plus en plus des procédés dogmatiques et magistraux. Pratiquant la méthode inductive, méthode d'enquête et de découverte, ils ont fait à leur auditoire la meilleure place. C'est un réconfort de constater combien de classes dites traditionnelles sont « nouvelles » à ce point de vue. Le terrain est donc préparé pour cette « osmose » que nous souhaitons tous et qui, à partir de l'expérience organisée, méthodique et limitée à laquelle vous avez été associés, doit conduire à une prise de conscience pédagogique, plus profonde et plus totale, de notre enseignement du second degré. Les

¹ HUBERT, RENÉ, *op. cit.*, p. 516 et 532.

² Cf. JOHANNOT, LOUIS, *Le raisonnement mathématique de l'adolescent*. Préface de Jean Piaget, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1947.

méthodes actives éprouvées dans l'enseignement du premier degré se sont donc, dans les classes nouvelles, adaptées aux exigences d'un autre âge scolaire. ¹ » Ajoutons que M. Brunold est également l'auteur d'une intéressante brochure sur l'enseignement des sciences au second degré.

MATHÉMATIQUES

Les *Cahiers pédagogiques pour l'enseignement du second degré* résument comme suit leur grande enquête sur « L'enseignement de l'algèbre » :

Une méthode active permet sans doute une assimilation correcte des notions d'algèbre au programme, et un contrôle efficace. L'avis des professeurs paraît unanime sur ce point. ² »

Les explications des auteurs qui ont traité de la règle des signes, se rattachent surtout aux procédés verbaux et intuitifs. Elles ne font pas appel à l'activité du sujet, comme si l'expérience n'avait rien à voir en mathématiques. Les uns insistent sur le fait que les mathématiques sont liées à un langage symbolique précis; ils se méfient des comparaisons que l'on peut établir avec la réalité pratique ou géométrique. Les autres ne craignent pas de faire appel à l'intuition pour rendre la règle compréhensible à l'élève.

A propos de la première de ces méthodes, nous soulignons tout au long de notre ouvrage que la logique ne se réduit pas à de la pensée verbale; elle est essentiellement un système d'opérations ³. Ces opérations dans leur essence psychologique, sont des actions; elles sont matérielles en leur point de départ. Ce sont des actions sur l'objet, telles, par exemple, les actions de réunion.

Rappelons que Piaget distingue deux étapes dans la logique de l'enfant et de l'adolescent. La logique telle que la comprend l'adulte, est une logique formelle, capable d'agir sur des propositions. Or les résultats de nos expériences de logique formelle montrent que cette forme de pensée n'apparaît que vers 11 ou 12 ans.

Dès l'âge de 7 ou 8 ans déjà apparaît la logique concrète, par opposition à la logique formelle. Cette logique suppose une manipulation d'objets, elle porte sur des opérations de classifications et de relations et par conséquent de nombres (qui constituent la synthèse des classes et des relations). Il ne s'agit point encore de toute la logique des classes

¹ BRUNOLD, CHARLES, *L'éducation, problèmes et perspectives*. « Cahiers pédagogiques pour l'enseignement du second degré », N° 2, novembre 1951, p. 103-104, ou : *L'éducation nationale*, Paris, 1^{er} nov. 1951.

² N° 4, février 1952; N° 7, juin 1952, p. 574.

³ Insistons sur le fait que nous nous référons toujours à la psychologie opératoire de Piaget, que nous avons choisie comme base de notre enquête. Voir : PIAGET, JEAN, *Remarques psychologiques sur l'enseignement élémentaire des sciences naturelles*, Paris, UNESCO et BIE, Publication N° 110, 1949, p. 35-45. PIAGET, JEAN, *Le droit à l'éducation dans le monde actuel*. Paris, UNESCO, 1949, p. 33-37.

et des relations, mais d'une partie de cette logique telle qu'elle résulte de manipulations.

Piaget a montré qu'il est nécessaire de développer et d'exercer cette logique pour aboutir à une logique formelle suffisante.

Nous donnons dans notre partie intitulée : « Opérations concrètes », ainsi que dans le stade des opérations concrètes de la Deuxième partie de ce travail, des expériences qui pourront être utilement reprises à titre d'exercices pédagogiques. Dans l'enseignement des mathématiques, il faut partir des relations logiques qualitatives. En même temps que le nombre et les données métriques, il s'effectue en effet toute une structuration logique qualitative.

Pour ce qui concerne la méthode intuitive, nous remarquons que la représentation imagée, l'appel au dessin, ne suffit pas, parce que l'image implique une attitude passive de la part du sujet. Il faut agir et commencer par agir sur des objets. Comme nous l'avons vu, et selon la psychologie de Piaget, il faut construire avant d'agir sur des représentations imagées.

Ces deux attitudes s'expliquent par la méfiance quasi générale des mathématiciens qui craignent qu'on affaiblisse l'esprit de rigueur des mathématiques en partant de l'expérience. Cette objection est fondée quand on pense à l'expérience physique, c'est-à-dire à la lecture des propriétés de l'objet, mais non pas quand on songe à l'expérience sur ses propres actions, sur soi-même. Cette méfiance des mathématiciens provient de la confusion entre ces deux types d'expériences. D'une part les expériences physiques font intervenir l'action sur des objets pour découvrir des propriétés de ce dernier. Elles conduisent ainsi à une abstraction des propriétés à partir de l'objet. Une recherche caractéristique à cet égard est l'expérience de la flexibilité de tiges de métal. Mais une autre catégorie d'expériences porte sur les propres actions du sujet au moyen d'un objet qui est simplement un point d'appui. Ce genre d'expériences est beaucoup plus précoce dans le développement de l'enfant. L'abstraction qu'on en tire, est une abstraction à partir de l'action, de l'opération. Telle l'expérience que cite Piaget : un mathématicien fait remonter son intérêt mathématique à une expérience d'enfant. Il a compté jusqu'à dix cailloux, a recommencé dans un autre ordre (inverse) et à son grand étonnement, a constaté avec un vif plaisir intellectuel qu'il arrivait toujours à dix cailloux. Il a ainsi découvert la notion cardinale indépendante de la série ordinale. Il n'a pas constaté des propriétés des cailloux, telles que leur poids ou leur couleur, mais il a fait une découverte sur lui-même. C'est l'expérience qui est le début du raisonnement.

Du point de vue pédagogique, la méthode qui laisse l'enfant expérimenter lui-même conduit à des résultats intéressants. Nos travaux montrent que les enfants comprennent, au niveau primaire, des structures

qu'ils ont beaucoup de peine à saisir au niveau secondaire. En effet, alors que les élèves de 13 à 14 ans éprouvent de sérieuses difficultés à saisir la règle dans l'abstrait, l'enfant, dès l'âge de 7 ou 8 ans, la comprend sous forme de jeu qu'il organise lui-même. Il faut évidemment préparer un dispositif conçu de manière qu'il donne à l'enfant la possibilité d'exécuter matériellement les opérations qu'on veut lui faire découvrir.

Cette méthode présente d'autres avantages encore : il est évidemment plus intéressant de découvrir soi-même que de suivre une démonstration. L'enfant qui cherche par lui-même prend le temps qui lui est nécessaire, avance selon ses possibilités et son rythme personnel. On peut être ainsi assuré que l'accent a été mis sur les points importants pour sa compréhension.

A notre connaissance, deux professeurs de mathématiques, à Genève, ont particulièrement tenu à recourir à ces méthodes expérimentales actives pour l'enseignement de la règle des signes, en assimilant notamment l'étude des sens positif et négatif à la marche en avant et en arrière. Il s'agit de M. Extermann dont nous parlons dans notre Quatrième partie et de M. Groscurin, lequel donne la forme suivante à son enseignement de la règle des signes.

Groscurin ¹ (Baden 1937) cite pour commencer le procédé qui consiste à donner un produit tel que $(a - b)(c - d)$, puis celui selon lequel on se borne à apporter la règle « à priori ». Il critique ce dernier procédé qui laisse un vide béant au lieu d'établir un lien avec l'acquis. L'opération n'est rattachée, du point de vue des signes, à aucune signification, on a le droit de dire tout aussi bien $- \cdot - = -$ que $+$.

Il a l'idée de recourir au mouvement en représentant chacune des quatre formes de la règle des signes par des flèches de direction.

Groscurin propose encore la marche d'un élève sur un axe orienté. L'orientation de son regard représente le signe du multiplicande et la marche en avant l'addition, tandis que la marche à reculons représente la soustraction. Mais il ne va pas jusqu'à la multiplication et n'épuise pas, ainsi, tout le champ de la règle des signes. Il affirme qu'un courrier de vitesse constante ($e = v \cdot t$) constitue mieux qu'une application de la règle des signes, qu'il en est la démonstration.

Il s'agit bien là d'une expérience sur ses propres actions. Nous voudrions cependant la voir représenter plus complètement la règle des signes. Comme nous le disons également tout au long de notre travail, il faut que l'enfant se trouve devant un réel problème à résoudre. Nous reviendrons enfin dans nos conclusions sur le point qui s'est révélé essentiel, à savoir, qu'il est préférable d'enseigner la règle des signes avant

¹ Nous citons en annexe une explication du même auteur, parue en 1936, à Genève, et utilisant la méthode des additions et des soustractions.

le niveau secondaire, sous la forme qui convient au stade de développement auquel est parvenu l'enfant. Comme on l'a remarqué, nous n'avons pas rencontré de proposition semblable. Lietzmann et Renneberg, au contraire, proposent de revenir plus tard sur la règle des signes, au moment où l'élève étudie la géométrie analytique par exemple.

Mialaret également, exposant l'enquête du groupe de travail de Sèvres sur quelques points précis des éléments de l'algèbre (enquête dont la conclusion débute ainsi : « Nous ne savons pas enseigner l'algèbre... ») pense que les pourcentages d'exactitude seraient immédiatement meilleurs si certaines notions étaient présentées plus tard ¹.

Bref, comme le dit si bien Buyse : « Ce qu'il nous faut en pédagogie *scientifique*, ce ne sont pas des idées préconçues ou des affirmations gratuites, des arguments tirés de l'autorité des philosophes, des citations littéraires ou des mots d'esprit : ce sont des faits, de simples petits faits — durs et irréfragables — dûment constatés et correctement interprétés ².

Les chapitres qui vont suivre exposent les modestes données que nous avons recueillies et mettent en évidence le fait que la pédagogie scientifique du niveau secondaire en est encore au stade des tâtonnements... Souhaitons que bientôt de plus vastes enquêtes soient entreprises sur ce sujet.

¹ MIALARET, G., *Etude de quelques mécanismes algébriques*. Laboratoire de psycho-pédagogie, Ecole normale supérieure de Saint-Cloud, « Cahiers pédagogiques pour l'enseignement du second degré », Lyon, N° 2, novembre 1951, p. 144-145.

² BUYSE, R., *L'expérimentation en pédagogie*. Bruxelles, Maurice Lamertin, 1935, p. 56.

DEUXIÈME PARTIE

Psychologie génétique

La psychologie génétique relie les deux extrêmes entre lesquels oscille la vie mentale; en effet, elle plonge ses racines dans la vie organique pour aboutir aux implications logico-mathématiques. Tout le développement s'oriente vers la forme d'équilibre nécessaire des actions, c'est-à-dire vers les groupements logiques et les groupes mathématiques élémentaires. La psychologie tend ainsi à rendre compte des sources de la logique et des mathématiques.

LA RÉVERSIBILITÉ

La réversibilité est la forme la plus caractéristique de l'équilibre final parce qu'elle exprime à la fois la nécessité opératoire de l'intelligence et le critère général de l'aboutissement à un équilibre permanent.

Cette réversibilité croissante doit être entendue dans un double sens, à la fois causal (extension et mobilité progressive des conduites) et implicatif (réversibilité opératoire); elle résulte, à ce double point de vue, de l'ajustement réciproque entre l'assimilation et l'accommodation.

On peut distinguer trois grands types de structures au cours du développement de l'intelligence :

1. A la frontière du biologique et du mental : les rythmes qui se présentent sous un double aspect physiologique et mental sont à sens unique.

2. Les régulations (semi-réversibles) aboutissent à des corrections qui s'effectuent en sens inverse des déformations causées par l'influence extérieure.

3. Le groupement (réversibilité entière) apparaît sous forme concrète d'abord puis formelle. A ce moment, il acquiert la signification qu'il a dans la logique des propositions.

Remarquons que les aspects affectifs et cognitifs propres à toute conduite présentent un caractère si indissociable que la succession des

rythmes (régulations et groupements qui caractérisent le passage des formes d'équilibre des unes aux autres dans le domaine cognitif) se retrouve dans l'explication des phénomènes affectifs.

Les critères de la réversibilité

Il y a deux critères essentiels de la réversibilité. Tout d'abord elle entraîne une coordination dépassant les données perçues, ensuite et surtout elle permet la constitution de principes de conservation (une certaine quantité de liquide ou de pâte à modeler reste constante au travers de ses déformations parce que chacune de celles-ci peut être corrigée par la transformation inverse).

L'irréversibilité chez l'enfant

Le raisonnement du jeune enfant est irréversible à trois points de vue. Du point de vue du fonctionnement psychologique : le jeune enfant ne sait pas revenir au point de départ en cas d'erreur : il ne fait pas d'hypothèses c'est-à-dire de marche provisoire en avant sous réserve d'un retour éventuel ; il croit d'emblée tout ce qu'il pense et y reste accroché. Du point de vue du contenu, il ne parvient pas à élaborer les principes élémentaires de conservation. Du point de vue de la forme enfin, son raisonnement est caractérisé par des opérations irréversibles.

De l'irréversibilité à la réversibilité

Sur le plan du développement individuel de la pensée, le processus d'équilibration est donc un passage progressif de l'irréversibilité initiale à la réversibilité terminale. Les habitudes et les perceptions élémentaires sont irréversibles, c'est-à-dire à sens unique, mais l'intelligence sensori-motrice (ou préverbale) découvre déjà les conduites de retour qui annoncent en partie la réversibilité des opérations. A partir de l'âge de quatre ans, sur le plan des actions intériorisées en représentations intuitives, l'enfant, de même, commence par ne pas savoir inverser les compositions imagées au moyen desquelles il pense. Mais les articulations progressives de l'intuition engendrent, dans la suite, une réversibilité croissante qui, vers 7 ou 8 ans aboutit aux premières opérations logiques concrètes consistant à réunir, sérier, etc. Ces opérations sont donc devenues réversibles au cours d'une longue évolution. Mais cette évolution ne s'achève que vers 11 ou 12 ans, lorsque les actions rendues réversibles pourront elles-mêmes être traduites sous forme de propositions, c'est-à-dire d'opérations purement symboliques. C'est alors et alors seulement que, grâce à la réversibilité opératoire enfin généralisée, la pensée se libérera de l'irréversibilité des événements temporels.

Ce développement peut encore s'exprimer ainsi : l'intelligence sensori-motrice se subordonne et corrige les perceptions initiales; la pensée représentative préopératoire corrige les schèmes sensori-moteurs en se les intégrant; les opérations concrètes corrigent à leur tour les intuitions en les absorbant, tandis que les opérations formelles s'intègrent les opérations concrètes sans les modifier essentiellement et en les complétant simplement; enfin les opérations formelles se multiplient sans se contredire entre elles.

Il y a donc bien équilibre croissant dans le sens d'une intégration toujours plus cohérente, en fonction de la réversibilité elle-même.

Les opérations inverses sont la condition de la rigueur, tandis que les opérations directes sont sources de productivité.

On peut ainsi suivre pas à pas les acquisitions en fonction de l'expérience et les modes très différents qui règlent ces acquisitions selon les niveaux d'assimilation. Nous avons vu, que de même que le milieu physique ne s'impose pas en une seule fois, ni d'un seul bloc à l'intelligence en évolution, de même le milieu social donne lieu à des interactions entre l'individu en développement et son entourage. En effet, sans l'échange de pensée et la coopération avec les autres, l'individu ne parviendrait jamais à grouper ses opérations en un tout cohérent. Le groupement consiste essentiellement à libérer du point de vue égocentrique; en son principe même il est coordination des points de vue, et cela signifie en fait une coordination entre observateurs, donc une coopération de plusieurs individus. La réversibilité de la pensée est ainsi liée à une élaboration collective, en dehors de laquelle les concepts ne sauraient conserver leur sens permanent et leur définition.

Le groupement est donc une forme d'équilibre des actions inter-individuelles comme des actions individuelles.

EVOLUTION GÉNÉTIQUE DE LA RÈGLE DES SIGNES

Ainsi, selon Piaget, la réversibilité croissante caractérise le développement de l'intelligence. Si donc la règle des signes est bien essentiellement une question de réversibilité, nous verrons évoluer génétiquement sa compréhension dans le même sens que la réversibilité elle-même.

Les hypothèses que nous avons posées à notre travail peuvent se résumer en une phrase : y a-t-il ou non une évolution génétique de la règle des signes ?

Afin de répondre à cette question, nous avons entrepris deux séries d'expériences : les unes étudiées de telle façon qu'elles puissent être présentées avec les adaptations nécessaires, à tous les âges entre 5 et 16 ans; les autres ne convenant qu'à des enfants de 7 à 12 ans ou encore de 12 ans et au-dessus.

Ces deux groupes d'expériences ont été conçus d'après les données de la théorie opératoire.

Les expériences qui s'adressent aux enfants de 5 à 7 ans font appel à la pensée représentative préopératoire; celles qui s'adressent aux enfants à partir de l'âge de 7 ans, font intervenir des opérations concrètes (réversibles naturellement) et celles qui sont destinées aux enfants à partir de l'âge de 11 ans ou 12 ans sont basées sur des opérations formelles.

Telles sont par exemple les expériences de logique ou de mathématique élémentaires, qui sont destinées au stade formel.

Nous commençons par l'exposé des expériences préparées pour les enfants de 5 à 15 ans, qui constituent la Deuxième partie de notre travail, pour passer ensuite aux expériences ne convenant qu'à une tranche d'âge déterminée. Les expériences concrètes sont décrites dans la Troisième partie et les expériences formelles dans la Quatrième partie de ce travail.

Nous avons interrogé individuellement 674 sujets : élèves des écoles enfantines, primaires et secondaires ou adultes, répartis selon leur âge :

- 124 sujets de 5 à 7 ans (stade de la pensée représentative);
- 290 sujets de 7 à 11 ans (stade des opérations concrètes);
- 260 sujets au-dessus de 11 ans (stade des opérations formelles).

Les élèves ont été choisis dans la moitié supérieure de chaque classe. Comme on a l'habitude de le faire en psychologie, nous disons qu'un test est résolu lorsque les trois quarts des sujets l'ont réussi. En décrivant chacune des expériences nous indiquerons le nombre des sujets examinés ainsi que le nombre des réussites. Nous donnerons un tableau d'ensemble à la fin de notre exposé des expériences, en rappelant le nombre de sujets interrogés et le nombre de réussites pour chaque expérience. Nous n'avons pas fait un travail statistique; pour que nos expériences, en effet, puissent être employées comme tests ou épreuves de niveau intellectuel, il faudrait qu'elles soient au préalable appliquées à des centaines de sujets et qu'on en percentile les résultats.

Expériences utilisant deux dispositifs et pouvant être appliquées aux enfants de 5 à 15 ans.

VOITURE ET BALANCE

Nous avons utilisé deux dispositifs dont l'un comprend une voiture et l'autre une balance. Ces deux dispositifs représentent les signes aussi bien propres qu'opérateurs. Les inversions auxquelles chacun d'eux donne lieu, sont en effet de deux espèces : la voiture peut rouler dans une direction et faire demi-tour pour rouler en sens inverse; elle peut également faire marche avant ou marche arrière. A la balance, on peut ajouter ou,

inversement, enlever du poids, et ceci du côté droit ou du côté gauche. Comme il s'agit tantôt d'ajouter, tantôt d'enlever, la balance dont nous nous servons est tarée : on peut ainsi ajouter du poids ou enlever la tare.

Ces dispositifs conviennent très bien aux enfants du stade représentatif préopératoire déjà. Quel est en effet l'enfant de 5 ans qui n'a pas vu rouler une voiture ou qui n'a pas essayé une balançoire à fléau ? L'enfant se sert de ses bras pour imiter le mouvement des bras de levier de la balance. Tout aussi naturellement, il suit les allées et venues de la voiture qui avance ou qui recule dans une direction ou dans l'autre.

RÈGLE DES SIGNES CONCRÈTE

Voiture

Dans quelle mesure cependant, l'enfant est-il capable de saisir l'aller et le retour, ou la marche avant et arrière ? Pour comprendre la règle des signes, il faut évidemment avoir compris que le résultat de deux inversions (de sens, dans le cas particulier) est le même que celui d'aucune inversion. Une grandeur positive multipliée par une grandeur positive donne un résultat positif, une grandeur négative multipliée par une grandeur négative donne également une grandeur positive. De même, il faut avoir compris qu'une seule inversion donne le résultat opposé à celui de deux inversions ou d'aucune inversion. Ce qui correspond dans la règle des signes, à la multiplication d'une grandeur positive par une grandeur négative et qui donne une grandeur négative pour résultat.

Le dispositif de la voiture a été utilisé déjà pour des enfants de 5 ans de la façon suivante : la voiture se trouve au milieu de la salle d'expériences et doit arriver jusqu'à l'enfant qui se trouve à deux mètres de là. Lorsque ce trajet est exécuté, l'expérimentateur lui demande de faire rouler la voiture d'une autre manière, tout en lui faisant atteindre le même but.

L'enfant aura-t-il alors l'idée de tourner la voiture en la mettant en marche arrière ? Si oui, ce fait montre qu'il saisit sous son aspect concret cette partie de la règle des signes.

Pour que l'enfant prouve par son action qu'il a saisi le mécanisme entier de la règle des signes ainsi présentée, il faut encore qu'il se rende compte que s'il se borne, soit à faire exécuter un demi-tour à la voiture, soit à en changer la marche, celle-ci se dirige vers le but opposé à celui qu'elle vient d'atteindre. Trajet que l'expérimentateur peut traduire en lui-même de la façon suivante en termes mathématiques : une quantité négative multipliée par une quantité positive ou une quantité positive multipliée par une quantité négative donne un résultat négatif. Si l'enfant saisit encore cette seconde partie du mécanisme de la règle des signes, c'est qu'il a compris cette règle sur le plan concret.

Balance

Quant à la balance, l'enfant saisit-il le fait qu'il y a deux façons de faire baisser un plateau ? Voit-il qu'il peut tout aussi bien ajouter du poids sur l'un des plateaux qu'en enlever sur l'autre pour que les bras de levier s'inclinent dans le même sens ? ¹ Ce qui dans l'esprit de l'expérimentateur et en termes mathématiques prendrait la forme suivante : la multiplication de deux quantités négatives donne le même résultat.

L'enfant comprend-il aussi que s'il se contente d'exécuter une inversion seulement, c'est-à-dire que si, par exemple, après avoir ajouté un poids à un plateau, il enlève ce poids au même plateau, les bras de levier s'inclinent dans le sens opposé à celui vers lequel ils venaient de se diriger ? Il en va de même si, après avoir ajouté un poids à l'un des plateaux, l'enfant en ajoute un à l'autre. Soit en termes mathématiques : la multiplication d'une quantité positive par une quantité négative ou d'une quantité négative par une quantité positive donne le résultat inverse à celui d'une quantité positive par une quantité positive ou d'une quantité négative par une quantité négative. Si l'enfant saisit ainsi le mécanisme de la balance, il a compris la règle des signes sur le plan concret.

RÈGLE DES SIGNES CONCRÈTE ET RÈGLE DES SIGNES MATHÉMATIQUE

Il convient cependant de faire quelques réserves quant au parallélisme que l'on peut établir entre la règle des signes telle qu'elle se présente avec ces dispositifs et la règle des signes mathématique. Celle-ci comporte généralement des quantités. Aussi, pour que nous puissions dire qu'elle a réellement été saisie par l'enfant, celui-ci ne doit pas être dérouté lorsqu'une multiplication numérique lui est présentée en même temps que la représentation concrète de la règle des signes telle que nous venons de la décrire à propos de l'expérience de la voiture ou de la balance. D'autre part, il faut que l'enfant établisse la correspondance entre les signes tels qu'ils sont présentés concrètement et les signes mathématiques, opératoires ou algébriques.

Ainsi, ce n'est que lorsque ces deux données sont présentes que l'on peut véritablement dire que la règle des signes est saisie dans son ensemble.

Il est évident, pour quiconque a quelque connaissance de psychologie génétique, que de telles données n'apparaissent pas simultanément, mais qu'au contraire leur acquisition s'échelonne au cours du développement de l'intelligence.

¹ Remarquons que cette expérience n'est possible que si, après chaque action exécutée par l'enfant, la balance est rétablie dans son équilibre de départ.

Passons maintenant à la description de ces expériences, stade par stade, en commençant par le stade représentatif préopératoire qui correspond à l'âge de 5 à 7 ans.

I. STADE DE LA PENSÉE REPRÉSENTATIVE PRÉOPÉRATOIRE

1. EXPÉRIENCE *a*) : LA VOITURE (EN DIRECTION FENÊTRE ET CORBEILLE)

Dispositif

Le cadre dans lequel se déroule cette expérience est très simple : une voiture pouvant rouler en marche avant et en marche arrière ; une feuille de papier servant de base de départ à la voiture. Cette expérience ne comporte donc ni trajets, ni points d'arrivée artificiels : la voiture déposée à terre roule simplement dans la salle d'expériences et arrive ainsi vers la corbeille à papiers, par exemple. Cette expérience ne fait pas non plus intervenir un langage compliqué et, enfin, elle n'introduit ni signes (selon le sens ou la marche de la voiture ou selon la position de l'enfant) ni multiplication numérique.

Technique et résultats

L'expérimentateur montre à l'enfant comment on fait marcher la voiture. Il la fait rouler en marche avant et en marche arrière. Puis il donne la voiture à l'enfant et lui permet de jouer librement pour qu'il apprenne à la manier.

L'expérimentateur place ensuite la voiture par terre, sur la feuille de papier, au centre de la salle d'expériences. Il se mêle au jeu de l'enfant ; comme lui, il se baisse vers la voiture, puis lui propose de la faire marcher, de telle sorte qu'elle arrive du côté de la fenêtre de la salle d'expériences, et ceci de toutes les façons dont la voiture peut rouler. Avant que l'enfant ne passe à l'exécution, l'expérimentateur fait quelques pas avec lui jusque vers la fenêtre, afin que celui-ci se rende compte de façon concrète du but à atteindre et de l'espace à parcourir. Lorsque l'enfant a trouvé l'une des solutions du problème, l'expérimentateur lui demande s'il y a une autre façon de faire rouler la voiture pour qu'elle arrive au même point. D'une façon générale, l'enfant de cinq ans résout cette question mais s'il ne songe pas à faire faire un demi-tour à la voiture sur elle-même, l'expérimentateur le lui montre. L'enfant fait alors rouler la voiture en marche arrière et arrive au même but.

L'expérimentateur replace la voiture à son point de départ, toujours sur la feuille de papier, au centre de la salle d'expérience, et propose un autre but : la corbeille à papiers par exemple (but qui se trouve dans une direction opposée au premier) en demandant à l'enfant de l'atteindre de toutes les manières possibles. Avant l'exécution, tous deux, expérimentateur et sujet, vont se placer vers la corbeille à papiers pour les raisons indiquées plus haut. L'enfant donne en général les deux façons de rouler, d'abord en marche avant puis en marche arrière.

On fait cesser le jeu et on demande à l'enfant combien il y a de possibilités pour arriver à la fenêtre. Sans hésiter nos sujets répondent : « deux » ! Nous leur demandons alors de nous les montrer et de nous les dire. L'enfant nous les montre facilement, mais il a quelque difficulté à nous les décrire, aussi l'aidons-nous en lui posant des questions telles que : « De quel côté était tourné le moteur ? » « En quelle sorte de marche ? » Sans ces précautions, l'enfant risque de se perdre dans d'autres détails descriptifs. On pose la même question pour la corbeille. Cette expérience est ainsi résolue dès l'âge de 5 ans¹.

La technique résumée comporte donc les trois questions suivantes :

1. Peux-tu faire en sorte que la voiture arrive vers la fenêtre ? Montre-moi les différentes manières de le faire.

2. Peux-tu faire en sorte que la voiture arrive vers la corbeille à papiers ? Montre-moi les différentes manières de le faire.

3. Montre-moi les différentes façons de faire pour arriver à la fenêtre, puis à la corbeille.

Nous donnons ici le protocole d'un enfant de 5 ans² :

Notons que l'enfant ne donne pas de réponse verbale aux questions que lui pose l'expérimentateur. Il se contente d'agir. D'autre part, il a d'abord l'idée de faire deux inversions avant de penser au trajet sans inversion.

Protocole de l'un des sujets interrogés

Suz. 5 ans (zéro mois).

1. Peux-tu faire rouler la voiture pour qu'elle arrive jusqu'à la fenêtre ? Essaie de le faire de toutes les façons que tu peux !

(L'enfant le fait : voiture orientée vers la corbeille, marche arrière, arrivée vers la fenêtre puis : voiture orientée vers la fenêtre, marche avant, arrivée à la fenêtre.)

¹ Nous avons interrogé huit sujets de 5 à 6 ans, sept d'entre eux ont résolu l'expérience.

² Nous pensons qu'il suffit de citer un protocole pour permettre au lecteur de se rendre mieux compte de la façon dont nous procédons dans cette expérience. De même nous nous contenterons de ne citer qu'un protocole pour les plus caractéristiques des expériences suivantes.

2. Et maintenant peux-tu faire arriver la voiture vers la corbeille, de nouveau de toutes les façons possibles ?

(L'enfant essaie, voiture orientée vers la corbeille et marche arrière. Puis : voiture orientée vers la fenêtre et marche arrière, arrivée à la corbeille. Puis : voiture orientée vers la corbeille marche avant, arrivée à la corbeille.)

3. Montre-moi les différentes possibilités pour arriver à la corbeille et à la fenêtre.

(Le sujet les montre; les deux pour la corbeille, puis les deux pour la fenêtre.)

Correspondance avec la règle des signes

Mettons cette expérience en parallèle avec la règle des signes :

La marche avant est considérée comme positive.

La marche arrière est considérée comme négative.

Le moteur orienté vers le premier point d'arrivée est considéré comme positif.

Le moteur orienté vers le second point d'arrivée est considéré comme négatif.

Le premier point d'arrivée est considéré comme positif.

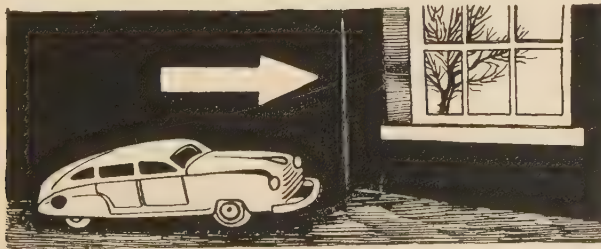
Le second point d'arrivée comme négatif.

Compréhension des élèves

Ce système de signification n'a pas été donné à l'enfant; il est resté dans l'esprit de l'expérimentateur. Cependant l'enfant a matériellement exécuté les actes suivants qui correspondent partiellement à la règle des signes. (Nous indiquons au fur et à mesure le degré de compréhension auquel nos sujets sont parvenus.)

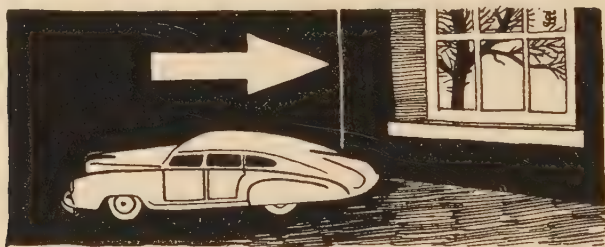
Selon nos indications concernant la technique, prenons le but de la fenêtre comme premier point d'arrivée (soit positif).

1. Supposons que la voiture soit placée au point de départ (au centre de la salle d'expériences) en marche avant, moteur orienté vers le premier point d'arrivée, la fenêtre. Le sujet comprend qu'il n'a plus qu'à mettre la voiture en marche pour qu'elle arrive au but.



Dans l'esprit de l'expérimentateur, cet exemple correspond à la multiplication d'un certain nombre de tours de moteur dans le sens positif (puisque'il s'agit de la marche avant considérée comme positive) accomplis un certain nombre de fois dans un sens positif (puisque la voiture est orientée vers le premier point d'arrivée : la fenêtre, considérée comme point d'arrivée positif). Il s'agit donc de la multiplication d'une quantité positive par un multiplicateur positif, ce qui produit un résultat positif (la voiture arrive à la fenêtre, point d'arrivée considéré comme positif).

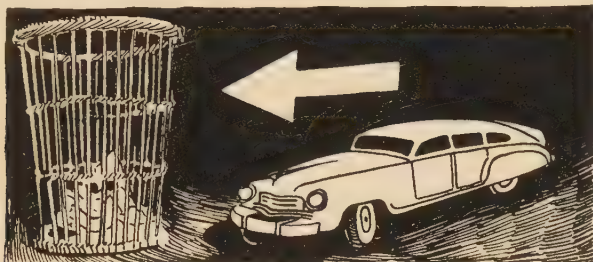
2. Le sujet doit trouver un autre moyen pour faire démarrer la voiture du même point de départ (centre de la salle d'expériences) pour arriver au même but : (fenêtre). Il faut donc qu'en replaçant la voiture à son point de départ, l'enfant inverse sa marche et son orientation. Nous avons ainsi : marche arrière et orientation vers la corbeille à papiers (point opposé à la fenêtre).



Dans l'esprit de l'expérimentateur, il s'agit de la multiplication d'un certain nombre de tours de moteur dans le sens négatif (puisque'il s'agit de la marche arrière) accomplis un certain nombre de fois dans le sens négatif (puisque la voiture est orientée dans le sens contraire au premier but qui était la fenêtre considérée comme point d'arrivée positif). Le résultat de cette multiplication d'un multiplicande négatif par un multiplicateur négatif est d'ordre positif. On pourrait dire aussi que pour l'expérimentateur il s'agit de la multiplication de l'orientation en arrière par la marche en arrière, ce qui donne un déplacement dans le sens positif.

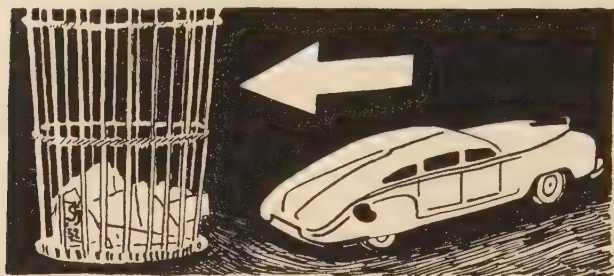
3. Le sujet et l'expérimentateur changent de place; ils vont tous deux se mettre dans le voisinage de la corbeille à papiers, point opposé à la fenêtre et qui va devenir le but. En plaçant la voiture à son point de départ (centre de la salle d'expériences), le sujet n'a qu'à retourner la voiture ou inverser la marche (c'est-à-dire mettre la voiture en marche avant). Une seule inversion donne donc le second point d'arrivée (négatif)

et non le premier. Ceci nous le remarquons, tandis que l'enfant ne s'en aperçoit pas. Tout dans son attitude montre en effet qu'avec le deuxième point de vue (la corbeille à papiers) l'enfant repart à zéro. Il ne regarde pas la corbeille comme l'opposé de la fenêtre qu'en somme il a oubliée. Il place de nouveau la voiture par rapport à lui-même, dans la bonne direction. L'important pour lui est qu'elle soit, ou bien orientée vers lui et en marche avant; ou bien, orientée en sens inverse et en marche arrière. Voici un croquis de la première de ces deux possibilités :



Voici de quoi il s'agit dans l'esprit de l'expérimentateur : la marche étant avant, le multiplicande est positif; l'orientation de la voiture étant vers la corbeille à papiers, qui est le second point d'arrivée (considéré comme négatif), est négative. Il s'agit donc d'un certain nombre de tours de moteur en marche positive (multiplicande) accomplis un certain nombre de fois dans une orientation négative (multiplicateur). Le résultat d'une telle multiplication est négatif puisque la voiture arrive au point d'arrivée (corbeille à papiers) considéré comme négatif.

4. Pour atteindre le même but par un autre moyen, le sujet doit inverser la marche et l'orientation. Il s'agit donc ici de deux inversions à partir d'un ordre indirect, ce qui redonne naturellement l'ordre indirect. Mais là de nouveau le sujet ne se rend pas compte; il n'a aucune idée du fait qu'on retombe ainsi dans un système de rotation, les nombres pairs d'inversions donnant un point d'arrivée et les nombres impairs un autre. L'enfant, à ce stade, utilise simplement les deux inversions pour ramener l'ordre direct. C'est déjà ce qu'il avait saisi à partir de son premier point de vue (la fenêtre). Pour le second point de vue, il se place exactement dans les mêmes conditions. Il a bien fallu cependant, pour passer du premier au second point de vue, qu'il inverse l'orientation ou la marche de la voiture, mais ce fait ne présente pour lui aucune difficulté, il le considère simplement comme le moyen de recommencer le jeu à partir de la nouvelle position adoptée, soit la proximité de la corbeille à papiers. Voici le croquis de cette quatrième partie du jeu :



Dans l'esprit de l'expérimentateur, il s'agit cette fois-ci de la multiplication d'un certain nombre de tours de moteur négatifs (puisque la voiture est en marche arrière) accomplis un certain nombre de fois dans un sens d'orientation positif (puisque la voiture est orientée vers le premier point d'arrivée, soit la fenêtre). Le résultat de la multiplication est négatif puisque la voiture arrive à la corbeille à papiers, point d'arrivée considéré comme négatif.

La façon dont l'enfant saisit cette recherche est donc bien loin de la règle des signes à proprement parler. Il n'arrive en effet encore que très imparfaitement à jouer cette concrétisation de la règle. Nous pouvons cependant affirmer que grâce à ce dispositif, qui lui est très familier, l'enfant utilise deux inversions, même de nature différente (correspondant aux signes propres et opératoires dans l'esprit de l'expérimentateur) de façon à se retrouver au même point qu'avant les inversions. Mais ceci revient à dire que l'enfant a pratiqué, en jouant, les formes de l'expérience correspondant au « plus fois plus » et au « moins fois moins » mathématiques, formes qui donnent toutes deux un résultat positif. Si l'enfant ne peut pas faire la multiplication qui produirait un résultat négatif, c'est qu'il n'est pas capable de saisir un critère qui fasse lien entre les deux buts opposés : il se place dans une seconde position identique à la première. Pourtant l'on peut dire que l'enfant a déjà une certaine idée du fait qu'une inversion ne donne pas le sens direct, puisque dans son jeu il obtient toujours, soit sans inversion, soit avec deux inversions, le sens direct qu'il recherche et ne commet pas l'erreur de n'effectuer qu'une inversion, ce qui lui amènerait le sens inverse. C'est ainsi qu'on peut dire que l'enfant au stade représentatif préopératoire a déjà une vague notion du fait qu'une inversion donne le résultat opposé, ou du moins pas le résultat direct. Mais l'enfant ne semble pas avoir une expérience concrète de ces formes de la règle des signes qui consiste en la multiplication d'un facteur négatif par un facteur positif, et vice versa. Seule la multiplication de deux facteurs positifs ou de deux facteurs négatifs semble être saisie par lui.

Il y a multiplication représentative préopératoire lorsque l'enfant se rend compte qu'il faut deux inversions pour atteindre le but proposé et que ces deux inversions doivent être exécutées pour que la voiture roule dans la direction voulue. Il faut donc que l'enfant songe aux deux inversions à la fois; il lui est tout à fait impossible d'envisager l'une sans l'autre, sans quoi le jeu ne réussit pas, c'est-à-dire que la voiture n'atteint pas le but convenu. Ainsi, dans tous les cas, qu'il n'intervienne pas d'inversion ou qu'il en intervienne deux, l'enfant doit considérer deux choses : l'orientation de la voiture et sa marche.

D'autre part, la compréhension que peut avoir l'enfant du problème est encore très attachée à la perception qu'il en a. Il faut qu'il soit dans une certaine situation pour résoudre la difficulté, sans quoi il en est incapable. C'est en se plaçant au point d'arrivée et en voyant la voiture de ce point, qu'il voit en même temps comment il doit la tourner et quel sens il doit donner à la marche pour arriver au but.

L'enfant n'établit aucune liaison entre les deux opérations qu'il a effectuées, l'une menant la voiture vers la fenêtre et l'autre vers la corbeille. Son système de référence s'est déplacé avec lui et aucun souvenir du premier ne semble subsister dans son esprit.

La représentation concrète des signes et de la loi qui régit leur multiplication, n'est donc pas complètement saisie par les enfants de ce stade. Cette expérience montre qu'ils ont compris l'équivalence qui veut que la voiture puisse rouler dans une orientation positive et en marche avant pour atteindre le but (positif) ou bien dans une orientation négative et en marche arrière pour atteindre ce même but. Elle montre d'autre part que les enfants ne peuvent pas saisir l'équivalence qui fait que la multiplication d'une quantité positive par une quantité négative et vice versa, donne un résultat opposé à celui de l'équivalence précédente (négatif). Ceci faute de savoir se placer à un autre point de vue que le leur propre.

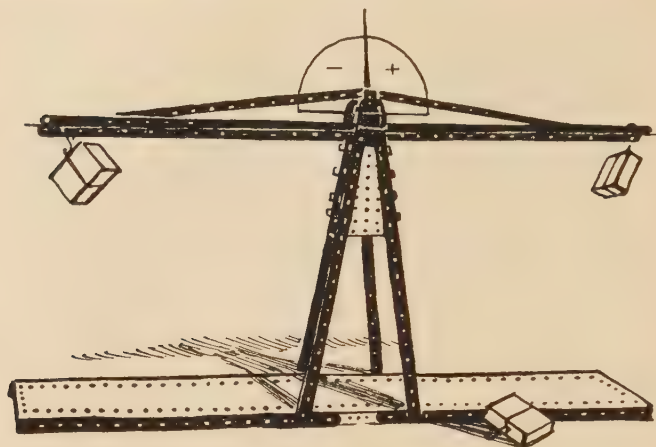
Cependant, les conclusions que nous pouvons tirer d'une telle expérience, demandent à être complétées. Il se peut en effet que les résultats soient déterminés par la situation expérimentale et qu'un enfant du même âge, placé devant un dispositif tout différent et auquel on poserait d'autres questions, réagisse aussi d'une façon différente. Passons donc à la description de notre seconde expérience génétique, soit la balance.

2. EXPÉRIENCE a) : LA BALANCE (EN MÉCANO, AVEC POULIE ET AIGUILLE PLUS OU MOINS VISIBLE)

Dispositifs

Nous avons utilisé trois dispositifs différents :

1. La balance de mécano : une balance construite en pièces de mécano, avec un cadran sur lequel sont indiqués les signes plus, à droite, et moins à gauche, selon ce croquis :



Le signe qu'indique l'aiguille représente le résultat auquel parvient le joueur. Des poids peuvent être suspendus aux bras. Les poids dont nous nous servons sont des boîtes d'allumettes munies d'un petit crochet permettant de les suspendre aux trous qui se trouvent sur chaque bras de levier.

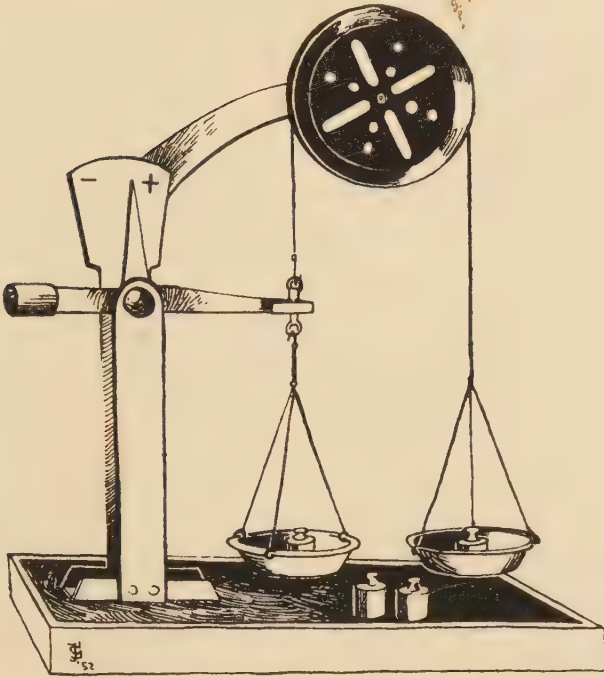
La balance est tarée : à chaque bras de levier on a suspendu une boîte d'allumettes. Une troisième boîte d'allumettes est mise à la disposition de l'enfant pour l'expérience.

2. La balance avec poulie : ¹ au lieu de deux plateaux placés l'un à gauche, l'autre à droite du couteau, nous avons placé les deux plateaux à droite du couteau. Tous deux sont suspendus à une poulie par des ficelles. Lorsqu'on charge un plateau, celui-ci tire l'autre en haut, grâce au jeu des ficelles et de la poulie, comme l'indique le croquis ci-contre.

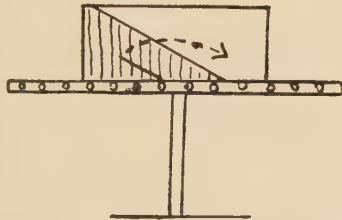
Nous avons utilisé des poids de dix grammes dont on se sert dans le commerce. La tare sur chaque plateau est de vingt grammes, soit de deux poids de dix grammes. L'enfant emploie deux autres poids de dix grammes pour l'expérience.

3. La balance avec une aiguille apparaissant plus ou moins : Au lieu de nous contenter d'inscrire les signes sur la balance, nous avons disposé devant l'aiguille un écran derrière lequel elle apparaît *plus* ou *moins* suivant sa position. Ce dispositif nous évite d'avoir à inscrire les signes plus ou moins sur la balance. Il nous suffit de dire au sujet : « Remarques-tu que l'aiguille est plus ou moins visible, lorsqu'elle est plus visible nous disons « plus » et lorsqu'elle est moins visible nous

¹ Cette balance a été construite par C. Wenger.



disons « moins ». Nous écartons ainsi de notre expérience encore un élément conventionnel.



Ces trois dispositifs ont été utilisés avec la même technique et ont donné des résultats identiques. Aussi, nous limiterons-nous à l'exposé de l'expérience de la balance de mécano :

Technique

On laisse le sujet agir librement; on lui demande simplement de jouer, soit en enlevant, soit en mettant une boîte d'allumettes sur la balance. Chaque fois qu'il a mis ou ôté une boîte, il doit tout remettre en

ordre, c'est-à-dire s'arranger à ce qu'une boîte d'allumettes soit devant le dispositif, et les deux autres suspendues, l'une à droite et l'autre à gauche de la balance (ceci pour que la balance reste tarée et qu'ainsi les conditions soient les mêmes pour chaque nouvelle expérience). L'expérimentateur veille à ce qu'au cours de ses jeux, l'enfant exécute bien les quatre formes de la règle des signes, et s'il le faut, il les lui suggère. Voici ces quatre formes de la règle :

1. Suspendre une boîte d'allumettes au côté droit de la balance, auquel cas l'aiguille va sur le signe positif.
2. Enlever la boîte d'allumettes (tare) du côté gauche de la balance; dans ce cas l'aiguille va aussi sur le signe plus.
3. Enlever la boîte d'allumettes (tare) du côté droit de la balance, auquel cas l'aiguille va sur le signe moins.
4. Ajouter une boîte d'allumettes au côté gauche de la balance et dans ce cas l'aiguille va sur le signe moins.

Ces préliminaires étant accomplis, on passe à la seconde partie :

1. L'expérimentateur demande à l'enfant de lui montrer ce qu'il peut faire en n'intervenant que du côté gauche de la balance, puis en n'intervenant que du côté droit, et enfin en intervenant des deux côtés de la balance. Il lui demande combien de possibilités cela fait en tout.

2. L'expérimentateur pose une série de questions à l'enfant, lui demandant de prévoir la conséquence de tel ou tel acte.

Voici un exemple de ces questions : « Si j'enlève une boîte de ce côté (l'expérimentateur montre à l'enfant, d'un geste, le côté de la balance dont il s'agit), où ira l'aiguille ? sur la croix ou sur la barre ? » Le sujet doit justifier sa réponse. (Aux jeunes sujets, nous n'avons en effet jamais parlé de signes positifs ou négatifs et plus ou moins, mais de croix et barres). Cette question n'a pas toujours été posée.

La technique peut donc être résumée comme suit :

1. L'enfant joue et exerce les quatre formes de la règle des signes.
2. L'enfant doit donner les différentes possibilités de jeu :
 - a) pour le côté droit de la balance (côté de la croix);
 - b) pour le côté gauche de la balance (côté de la barre);
 - c) au total, pour les deux côtés de la balance.
3. L'expérimentateur pose une série de questions à l'enfant, chacune de ces questions portant sur l'une des quatre formes de la règle des signes. L'expérimentateur en donne les deux premiers termes et le sujet doit trouver le résultat avant l'expérience; il doit donc prévoir ce résultat, c'est-à-dire montrer à l'avance le signe sur lequel l'aiguille ira.

Protocole de l'un des sujets interrogés

PIE. 5 ans 2 mois.

Tu peux jouer. Essaie de faire tous les jeux possibles avec cette boîte d'allumettes et les deux qui sont suspendues à la balance. Avant de jouer, tu me dis de quel côté tu penses que la balance penchera. Que se passera-t-il si tu agis du côté de la barre ?

Elle penchera du côté de la barre. (Il ôte une boîte du côté négatif.) Oh! oui, c'était parce que j'avais pas calculé que c'est plus lourd. Pourquoi vous avez pas pris ceux qui ont cinq ans et demi? Moi j'aime bien aussi.

Elle va pencher du côté de la barre (il met une boîte du côté négatif). J'savais bien parce que c'est trop lourd.

(Il ajoute une boîte du côté positif.) Elle va pencher du côté de la croix; j'sais que c'est juste; c'est tout juste! Y a quelque chose là dedans? Là dedans, y a quelque chose?

Non. As-tu essayé toutes les possibilités ?

Quand on ôte celle-ci (du côté positif) ça fait plus lourd de ce côté; ça fait plus lourd de ce côté (négatif), parce que là, c'est trop léger. Regarde c'est juste, j'crois que j'ai tout fait à ce jeu.

Combien y a-t-il de choses différentes ?

J'sais pas!

Dis-moi ce que tu as fait.

Non! j'me rappelle plus!

Que peux-tu faire du côté de la barre ?

Elle va pencher du côté de la barre (il met une boîte du côté négatif). Moi j'y sais!

Recommençons :

Et maintenant elle va pencher du côté de la croix (il ajoute une boîte du côté positif). De ce côté; pi ça va aller de ce côté. J'crois que j'ai tout fait!

On peut aussi enlever la boîte.

Ah! oui, alors elle va pencher du côté de la barre (il enlève la boîte du côté positif). Ça va de ce côté; alors c'est juste. Et ça ira du côté de la croix (il enlève la boîte du côté négatif). C'est juste.

J'ai mis les deux ici (côté négatif). Pi après les deux ici (côté positif), pi après j'en ai enlevé une (côté positif), pi mis une ici (côté négatif).

Cela fait combien ?

J'sais pas!

J'sais combien ça fait, mais j'me rappelle plus.

Comptons !

Mettre ici, pi ça descend là ; (côté négatif). Oter ici (côté négatif) ; mettre là (côté positif). Oter ici (côté positif). J'crois qu'c'est tout ! ça fait j'crois quatre choses ; peut-être j'suis pas sûr.

Cet enfant de 5 ans a facilement résolu l'expérience. Après avoir introduit celle-ci en demandant au sujet de donner les solutions pour un des côtés de la balance, l'expérimentateur n'a plus besoin d'intervenir pour demander le nombre de solutions possibles d'un côté, puis de l'autre.

Cependant lorsque l'expérimentateur lui demande combien il y a de solutions au total, l'enfant ne sait pas répondre, pas plus en acte qu'en parole.

Plus tard, l'enfant oublie même qu'on peut non seulement ajouter des boîtes mais aussi en enlever.

D'autre part, au cours de l'expérience, l'enfant s'intéresse à ce qui peut bien se trouver dans les boîtes. Nous avons vu qu'il fait également la remarque suivante : « Pourquoi vous n'avez pas pris ceux qui ont cinq ans et demi ? » ; autrement dit, l'enfant s'intéresse à des questions ne concernant pas l'expérience elle-même.

Protocoles de deux sujets interrogés :

Afin de montrer l'essentiel des résultats que l'on peut obtenir avec chaque sujet, nous donnons ici quelques résumés de protocoles :

I. REN. 5 ans 2 mois (nous classons les réponses selon l'ordre du résumé de la technique) :

1. Le sujet mêle à ses réponses des questions ne concernant pas l'expérience elle-même, demandant par exemple ce qu'il y a dans la boîte. La première réponse à propos de l'exercice consistant à enlever une boîte du côté gauche de la balance est fausse. Les trois autres exercices sur la règle des signes amènent immédiatement des réponses justes, et le sujet les explique ainsi : « Quand on ôte celle-là (côté positif) ça fait plus lourd de ce côté (côté négatif). » Le sujet montre ainsi qu'il a saisi le système de la balance.

2. Quant au nombre de solutions possibles, le sujet déclare d'abord n'en rien savoir, puis il procède à une série d'essais et donne encore une fois une réponse montrant son incertitude : « J'sais combien ça fait, mais je me rappelle plus ! » Enfin, après une troisième série de tentatives, le sujet donne tout de suite le résultat pour les deux côtés de la balance en s'exprimant ainsi : « Ça fait j'crois quatre choses ! »

3. A cette question de la technique, toutes les réponses du sujet sont justes.

II. ANO. 5 ans 4 mois :

1. Sur quatre questions, le sujet donne deux réponses justes; il fait une faute à l'exercice qui consiste à ajouter une boîte d'allumettes du côté du signe moins et une faute à l'exercice qui consiste à ajouter une boîte d'allumettes du côté du signe plus.

2. Le sujet ne se rappelle plus combien de formes différentes il existe, même après avoir joué une seconde fois.

3. L'enfant fait une faute lorsqu'il s'agit d'enlever une boîte d'allumettes du côté du signe plus. Mais lorsqu'on lui pose une seconde fois la même question, il montre pourtant qu'il a compris le système de la balance, en s'exprimant ainsi : « Parce que ça penche de ce côté (côté du signe plus) ça ira de ce côté (côté du signe moins). » Voici encore un exemple de la façon dont s'exprime cet enfant, pour deux autres formes de la règle des signes : « Parce que, quand on enlève celle-ci (côté du signe moins), ça vient du côté ici (côté du signe plus); pi quand on enlève ce côté (côté du signe plus) ça vient de ce côté (côté du signe moins). » En parlant, l'enfant fait le geste avec les deux bras, tenant l'un levé et l'autre baissé. Il relève la difficulté qu'il éprouve à considérer deux choses à la fois : si d'un côté le plateau baisse, il monte de l'autre côté. Les deux bras de l'enfant exécutent le geste correspondant à la position des deux bras du levier de la balance. Si, par exemple, l'expérimentateur propose à l'enfant d'enlever un poids du côté de la croix (ou signe plus), celui-ci prévoit que le plateau droit va se lever, et par conséquent le plateau gauche baisser. Mais pour arriver à cette découverte, l'enfant est obligé d'exécuter en même temps le geste : il étend donc ses bras, lève le bras droit (puisque c'est le plateau droit qui se lève) et baisse le bras gauche (puisque c'est le plateau gauche qui se baisse). Ses bras forment ainsi la ligne que nous représentons sur le croquis. Ce geste permet au sujet de trouver plus facilement la position dans laquelle se mettra l'aiguille de la balance, et ainsi le signe vers lequel elle penchera.

*Résultats*

Voici un tableau donnant le nombre d'enfants interrogés, classés par âge ainsi que par le nombre de leurs réussites. Nous avons examiné des sujets de 5 à 9 ans.

Les sujets de 5 ans déjà peuvent résoudre cette expérience. Les résultats les meilleurs ont naturellement été donnés par les sujets qui

ont compris le système de la balance et qui voient facilement la correspondance entre les deux plateaux.

Age	Réussites	Nombre de sujets
5-6	5	6
6-7	4	6
7-8	4	6
8-9	5	6
		24 Total

Correspondance avec la règle des signes

Voici le parallélisme de cette expérience avec la règle des signes :

Poser est considéré comme positif.

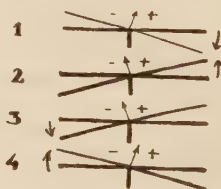
Oter est considéré comme négatif.

Agir sur la branche droite du fléau est considéré comme positif.

Agir sur la branche gauche du fléau est considéré comme négatif.

Lorsque l'aiguille s'incline à droite, le résultat est positif; lorsqu'elle s'incline à gauche, le résultat est négatif.

Ces correspondances n'ont pas été indiquées aux enfants; ces derniers ont joué selon le schéma suivant :



1. Ajouter du côté de la croix : l'aiguille va sur la croix.
2. Enlever du côté de la croix : l'aiguille va sur la barre.
3. Ajouter du côté de la barre : l'aiguille va sur la barre.
4. Enlever du côté de la barre : l'aiguille va sur la croix.

Compréhension de l'enfant

L'enfant trouve-t-il de lui-même trois ou même quatre de ces possibilités ? Voici comment il procède pour chacune d'elles : il sait très bien, par exemple, que si l'un des plateaux s'abaisse, l'autre s'élève. Il suit facilement ce mouvement d'un geste : baissant l'un de ses bras et levant l'autre. Ces mouvements l'aident à se représenter la direction que prendra l'aiguille.

La multiplication logique se trouve dans le fait qu'il faut prendre garde à deux choses à la fois : au côté sur lequel on agit et à l'action que l'on effectue, soit que l'on ajoute, soit que l'on ôte.

Dans cette expérience, les inversions consistent à ajouter ou à enlever des poids et à passer, pour agir, du côté gauche de la balance au côté droit ou inversement.

Suivons les actes de l'enfant. Supposons l'ordre suivant :

1. L'enfant agit du côté $+$, il ajoute et obtient ainsi $+$
2. L'enfant agit du côté $+$, il enlève et obtient ainsi $-$
3. L'enfant agit du côté $-$, il enlève et obtient ainsi $+$
4. L'enfant agit du côté $-$, il ajoute et obtient ainsi $-$

L'enfant, après avoir ajouté du côté $+$, enlève du même côté; il exécute ainsi l'opération inverse à celle qu'il vient de faire : il en obtient naturellement aussi le résultat inverse. L'opération suivante, à savoir enlever du côté négatif, suppose en plus de l'acte d'enlever, opposé à l'acte d'ajouter, l'action sur le côté $-$ qui est opposé au côté $+$, et le résultat est $+$. Il s'agit alors d'une double inversion. La dernière de ces opérations enfin, comme la première, fait intervenir l'acte d'ajouter, puis, comme la troisième, l'action sur le côté $-$ qui est opposé au côté $+$; le résultat est $-$.

Relevons cependant le fait que c'est l'expérimentateur qui a aidé l'enfant à passer d'un bras de levier de la balance à l'autre. Ainsi, comme avec le dispositif de la voiture, l'enfant n'a pratiquement exécuté qu'une inversion : au lieu d'ajouter il a enlevé, et vice versa.

Il arrive cependant, étant donné que l'élément perceptif de cette expérience est exceptionnellement bien adapté aux possibilités des enfants du stade représentatif préopératoire, que l'enfant passe spontanément d'un côté de la balance à l'autre. Il exécute alors la règle des signes concrète correspondant à la règle des signes mathématique.

De la position qu'il occupe devant la balance, l'enfant voit tout aussi bien ce qui se passe à droite qu'à gauche de l'origine (axe de la balance). Il n'est donc pas nécessaire, comme dans l'expérience de la voiture, que l'enfant se déplace au cours de l'expérience.

Il peut donc exécuter le geste des bras correspondant aux mouvements des bras de levier. L'enfant se trouve être ainsi, sans changer de place, au point de vue de la première solution, puis de la seconde, c'est-à-dire qu'il a toujours la possibilité de voir devant lui l'aiguille se diriger vers le résultat. Cette situation privilégiée favorise une réussite de l'expérience plus précoce que celle que l'on obtient avec le dispositif de la voiture. Dans l'expérience de la voiture en effet, le sujet doit se déplacer pour se trouver devant la voiture roulant vers le but, pour voir le résultat se dérouler devant lui, et ceci pour les deux points d'arrivée de la voiture.

Qu'il s'agisse de la voiture ou de la balance, l'enfant du stade représentatif préopératoire fait donc toujours un mouvement. Dans l'expérience de la balance, c'est un mouvement des bras seulement, tandis

que dans l'expérience de la voiture, c'est un mouvement du corps entier.

Nous verrons qu'à partir du stade concret, ces divers mouvements sont intériorisés et que les réponses de l'enfant ne dépendent plus des situations dans lesquelles il se trouve. Dans l'expérience de la voiture, cependant, pour résoudre une expérience comportant deux points d'arrivée opposés, l'enfant (7 ou 8 ans) doit être aidé, l'expérimentateur devant ramener ces deux points de vue opposés à la position qu'il occupe, en faisant intervenir des notions telles que devant et derrière.

Ces deux expériences mettent bien en lumière ce que Piaget dit du stade représentatif préopératoire. Piaget insiste en effet sur le fait qu'à ce stade l'intuition est très proche de la perception et qu'elle se centre sur un état particulier de l'objet. Il ne s'agit à son avis que de sortes d'instantanés, images ou prises de vue de la réalité, qui ne représentent que quelques itinéraires sur l'ensemble des trajets possibles et sans coordonnées suffisantes pour passer de l'un à l'autre. Si l'expérience de la balance réussit plus tôt que celle de la voiture, n'est-ce pas précisément parce qu'elle permet à l'enfant une image ou prise de vue globale de la réalité, alors que dans celle de la voiture le jeune sujet perçoit deux itinéraires sans pouvoir établir la coordination qui lui permettrait de passer de l'un à l'autre. De ces deux itinéraires, l'un correspond à la multiplication de deux quantités positives et l'autre à la multiplication de deux quantités négatives.

Résumé du stade de la pensée représentative préopératoire

Les expériences que nous avons présentées au stade représentatif préopératoire mettent en œuvre les signes. Il n'est pas encore question de multiplication numérique. On n'y fait encore aucune tentative non plus, pour mettre les faits en relation avec les signes algébriques ou opératoires. Il s'agit simplement de jeu dont la signification n'est connue que de l'expérimentateur; le sujet n'en a aucune idée.

Et ce jeu même n'est pas joué de telle façon que l'on puisse dire que la règle des signes est saisie sur le plan concret. L'enfant n'en comprend qu'une partie; il est généralement capable d'exécuter une inversion et parfois deux dans des circonstances exceptionnelles seulement. Pour que l'on puisse dire qu'il a saisi la règle des signes, il faudrait que son jeu montre nettement qu'il a compris que le résultat de deux inversions est semblable à celui d'aucune inversion, et que le résultat d'une seule inversion est toujours le même et opposé à celui de deux ou d'aucune inversion. Or l'enfant n'établit pas encore de relation entre ces différents faits; ce ne sont que des faits isolés dont il prend conscience.

II. STADE DES OPÉRATIONS CONCRÈTES

Ici, comme dans le stade de la pensée représentative préopératoire, la règle des signes doit être représentée concrètement. Mais, cette fois, tous les éléments de la règle pourront être présents, pour autant bien entendu qu'il s'agisse d'un matériel manipulable. L'expérimentateur n'aura plus besoin d'intervenir pour donner une vue générale des faits, car à ce niveau, l'enfant les domine.

Quant à la multiplication numérique, le nombre et ses opérations ont été spécialement bien étudiés par Piaget dans son ouvrage intitulé *La genèse du nombre*¹, et dans lequel il montre en conclusion, que la notion de nombre est acquise dès l'âge de 7 ans. La psychologie opératoire montre également qu'à cet âge l'enfant est capable de multiplication logique, autrement dit de considérer deux facteurs simultanément. Piaget constate aussi que, dès le stade concret, l'enfant est capable d'addition et de multiplication, puisque celle-ci n'est en fait qu'une addition itérée. Ainsi, selon Piaget², l'enfant dès l'âge de 7 ans, connaît les différentes notions qui entrent en jeu dans une multiplication numérique.

Tous les éléments d'une représentation concrète de la règle des signes avec multiplication numérique devaient donc être accessibles à l'enfant de ce stade. Saurait-il cependant combiner ces éléments dès le début du stade concret ? C'est là le point que nos expériences devaient révéler.

La voiture

Commençons par l'expérience de la voiture. Comme nous le disions plus haut, ce n'est plus l'expérimentateur qui établit le lien entre les différentes formes de la règle des signes. C'est l'enfant lui-même qui doit passer de la multiplication d'une quantité positive par une quantité positive, à la multiplication de deux quantités négatives, et à celle d'une quantité positive par une quantité négative.

Aux enfants du stade concret, nous avons proposé deux sortes d'expériences de la voiture. Ces expériences sont différentes l'une de l'autre non seulement quant au dispositif, mais aussi quant à la technique.

La première d'entre elles fournit encore une sorte de lien entre les différentes formes de la règle des signes, lien qui est constitué par l'enfant lui-même. L'expérimentateur le place en effet dans des conditions telles

¹ PIAGET, JEAN, *La genèse du nombre*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1941.

² Il va de soi que d'autres théories du nombre ont été données, mais nous ne pouvons pas en tenir compte ici parce qu'elles nous entraîneraient trop loin. Nous avons pris le point de vue de Piaget; nos résultats ont vérifié cette théorie du nombre et mis en évidence l'intérêt et la fécondité de ces thèses appliquées à la pédagogie.

qu'il ne peut pas faire autrement que de tenir lieu lui-même de relation entre les différentes formes de la règle des signes. L'enfant est installé au centre de la salle d'expérience, tout près du point de départ de la voiture et dans une position telle que devant lui se trouve le premier point d'arrivée, et derrière lui, le second. La voiture pourra ainsi rouler non seulement en marche avant et en marche arrière, mais aussi avec le moteur dirigé vers le point d'arrivée situé en avant ou en arrière par rapport à l'enfant.

La seconde expérience ne fait plus intervenir la position de l'enfant dans le jeu. Elle fixe par convention que le premier point d'arrivée de la voiture que l'on se propose comme but, est positif, tandis que le second est négatif. Ainsi la direction que l'on se fixe pour but correspond au sens positif, tandis que la direction contraire correspond au sens négatif. Pour les nombres, c'est aussi par convention que l'on décide de nommer les uns positifs et les autres négatifs.

Cette expérience fait aussi intervenir des multiplications de quantités numériques. Les distances que la voiture parcourt sont en effet mesurées, et l'enfant peut exécuter une addition ou une multiplication toute concrète. L'expérimentateur lui fournit à cet effet des jetons et même des paquets de jetons correspondant aux trajets que la voiture effectue.

La balance

L'expérience de la balance permettra également à l'enfant de sentir le lien entre les quatre formes de la règle des signes. Pour ce stade, nous avons repris les trois dispositifs dont nous avons parlé déjà à propos du stade représentatif préopératoire. Avec la balance de mécano et la balance à poulies, l'expérimentateur fixe par convention que le côté droit est positif et le côté gauche négatif tandis qu'avec la balance à aiguille plus ou moins visible, il appelle plus le côté où l'aiguille est plus visible, et moins le côté où l'aiguille est moins visible. Mais, cette fois, on procédera avec une certaine quantité d'allumettes ou plusieurs poids de dix grammes, ce qui permettra de faire des additions et de très simples multiplications.

L'enfant qui sera capable de résoudre les expériences de la voiture ou de la balance, telles que nous venons de les décrire, aura saisi la règle des signes sur le plan de l'action.

Voyons ces expériences :

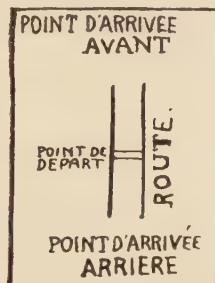
1. LA VOITURE, EXPÉRIENCE *b*) (DONT LE BUT EST SITUÉ EN AVANT OU EN ARRIÈRE DU SUJET)

Dispositif

Une voiture pouvant rouler en marche avant et en marche arrière; une bande de papier représentant une route; une table; deux chaises. (Le tout disposé selon le schéma ci-contre.) L'expérimentateur et le

sujet prennent place dans le même sens que la route; ainsi, il y a un point d'arrivée devant eux et un point d'arrivée derrière eux. Les trois situations que nous proposons sont proches de la réalité :

1. moteur dirigé au départ vers l'avant ou vers l'arrière par rapport au sujet et à l'expérimentateur;
2. marche avant ou marche arrière de la voiture;
3. arrivée en avant ou en arrière, par rapport au sujet et à l'expérimentateur.



Technique et résultats

Nous avons procédé dans l'ordre suivant :

1. L'expérimentateur montre au sujet comment la voiture fonctionne : il essaie devant lui la marche avant et la marche arrière. Le sujet joue à son tour avec la voiture, librement. Il la fait ainsi rouler en marche avant et en marche arrière.

2. L'expérimentateur intervient pour donner la règle du jeu au sujet :

- a) La voiture peut rouler en marche avant et en marche arrière;
- b) lorsque la voiture a été placée sur la route, à son point de départ, elle peut rouler, soit vers l'avant par rapport au sujet et à l'expérimentateur, soit vers l'arrière, toujours par rapport au sujet et à l'expérimentateur;
- c) le point d'arrivée de la voiture, par rapport au sujet et à l'expérimentateur, peut être situé, soit en avant, soit en arrière.

L'enfant joue, en plaçant d'abord la voiture à son point de départ. Il peut exécuter quatre trajets différents :

- 1) s'il oriente la voiture vers l'avant et la met en marche avant, elle arrivera en avant par rapport à lui;
- 2) s'il oriente la voiture vers l'arrière et la met en marche arrière, elle arrivera en avant par rapport à lui;
- 3) s'il oriente la voiture vers l'avant et la met en marche arrière, elle arrivera en arrière par rapport à lui;
- 4) s'il oriente la voiture vers l'arrière et la met en marche avant, elle arrivera en arrière par rapport à lui.

Il est clair que l'enfant peut réaliser ainsi sur le plan concret les quatre formes de la règle des signes : il y a deux façons de faire rouler la voiture pour qu'elle arrive « en avant » et deux façons de la faire rouler pour qu'elle arrive « en arrière ». Dans l'esprit de l'expérimentateur « devant »

ou « en avant » signifie ou représente le positif, tandis que « derrière » ou « en arrière » représente le négatif. Donc : plus, plus, ainsi que moins, moins, donnent plus, tandis que plus, moins, et moins, plus, donnent moins.

Afin de savoir si l'enfant a bien compris la règle du jeu et s'il s'en souvient, nous lui demandons d'effectuer un trajet et de le traduire dans le langage que nous avons convenu d'employer. Afin de rendre cet exercice plus attrayant ou plus intéressant pour l'enfant, l'expérimentateur se détourne pendant que le sujet fait exécuter le trajet à la voiture; il lui est ainsi impossible de voir la voiture rouler. L'enfant doit alors lui dire quel a été le trajet de la voiture. L'expérimentateur effectue alors ce trajet et s'il ne correspond pas à celui que vient de décrire l'enfant, ce dernier se rend compte qu'il a commis une erreur dans sa description. L'expérience est alors répétée une ou deux fois encore, jusqu'au moment où le sujet l'a bien comprise.

L'enfant donne généralement des solutions isolées, solutions qui ne concernent que l'un des trajets de la voiture. Par exemple, il dira : « Si la voiture est tournée du côté de l'arrière et roule en marche avant, elle arrive en arrière. » Il lui arrive aussi de donner deux solutions en disant : « Pour arriver en avant, il faut que le moteur soit tourné vers l'avant et que la voiture roule en marche avant. Pour que la voiture arrive en arrière, il faut la mettre en marche arrière et la tourner en direction de l'avant. »

3. Les exercices précédents ayant été exécutés pour habituer l'enfant à cette sorte de jeu, l'expérimentateur lui pose des questions. Indiquant la position de la voiture au départ (orientation vers l'avant ou vers l'arrière) sa façon de rouler (marche avant ou marche arrière), il lui demande de deviner où la voiture arrivera, si c'est en avant ou en arrière par rapport à lui-même. Ces questions sont facilement résolues dès l'âge de 7 ans.

Remarquons cependant que l'enfant s'aide de la voiture de façon concrète, en la plaçant chaque fois dans la position indiquée.

4. Afin de voir dans quelle mesure l'enfant pourra se dégager de cette manipulation concrète, l'expérimentateur place un écran devant la voiture et pose des questions semblables, en indiquant donc chaque fois au sujet la position de départ de la voiture (orientation et marche) et en lui demandant de deviner le lieu d'arrivée de la voiture. Les sujets de 7 ans déjà y arrivent tout aussi bien que sans écran. L'un d'entre eux auquel nous demandions comment il s'y prenait pour répondre si bien nous a répondu d'un ton qui en disait long : « J'ai un cerveau et c'est pour m'en servir ! »

L'expérience désignée sous lettre a) est résolue, comme nous l'avons dit plus haut, à l'âge de 5 ans déjà. Mais, nous l'avons dit aussi, la cor-

respondance avec la règle des signes n'était alors que partielle. Si l'expérience b) n'est résolue qu'à 7 ans, en revanche le parallèle avec la règle des signes est juste. Ainsi, dès cet âge de 7 ans, le sujet domine la situation expérimentale; il voit le problème dans son ensemble et réalise la règle des signes sur le plan concret.

Age	Réussites	Nombre de sujets
6-7	2	6
7-8	5	6
		12 Total

Un point cependant manque encore : la multiplication numérique, que nous verrons apparaître avec les expériences suivantes.

Protocole de l'un des sujets interrogés

Voyons un des protocoles de l'expérience précédente :

1. Je vais te montrer comment la voiture fonctionne, en marche avant et en marche arrière.

(Le sujet joue librement.)

2. Je vais t'indiquer les règles du jeu (L'expérimentateur explique les données : lieux d'arrivée; avant ou arrière; orientation vers l'avant ou vers l'arrière; marche avant ou arrière. Il fixe aussi la ligne de départ de la voiture. Puis il fait faire à l'enfant des exercices.) Dis-moi comment la voiture est placée.

Moteur vers l'avant, marche avant.

Où est-ce que la voiture arrivera ?

En avant.

Exécute un trajet avec la voiture et dis-moi ce que tu fais. (L'expérimentateur se détourne.)

(L'enfant exécute un trajet.) J'ai fait marche arrière, moteur en arrière, j'suis arrivé en arrière.

Je vais essayer ! (Le moteur avait été placé vers l'avant et non pas vers l'arrière.)

(Avec un regard consterné :) Je m'étais trompé; j'avais mis le moteur vers l'avant !

J'ai compris !

Marche avant, moteur vers l'arrière, arrivée en arrière.

(Juste.)

Elle est bien cette voiture ! Marche arrière, moteur vers l'avant, arrivée en arrière !

(Juste.)

Marche arrière, moteur vers l'arrière, arrivée en avant.

3. Il s'agit maintenant de deviner où la voiture ira si le moteur est dirigé vers l'avant, et que la voiture roule en marche arrière.

En arrière. (Il fait le geste.)

Si le moteur est dirigé vers l'avant, marche avant ?

En avant.

Si le moteur est dirigé vers l'arrière, marche avant ?

Vous arrivez en arrière.

Si le moteur est dirigé vers l'arrière, marche arrière ?

Vous arrivez en avant. (Il fait le geste.)

Si le moteur est dirigé en avant, marche arrière ?

En arrière.

4. Et maintenant, je vais cacher la petite voiture, pour que tu devines sans la voir. Où ira-t-elle si le moteur est dirigé vers l'avant, marche arrière ?

En arrière.

Si le moteur est dirigé en arrière, marche arrière ?

En avant.

Si le moteur est dirigé vers l'avant, marche avant ?

En avant.

Si le moteur est dirigé vers l'arrière, marche avant ?

En arrière.

C'est extraordinaire, tu réponds toujours sans te tromper ! Est-ce que tu as l'habitude d'une voiture ?

Nous aussi on a une voiture, alors je connais un peu.

Comment as-tu deviné quand la voiture était cachée ?

Dans ma tête, c'est pour ça que j'ai un cerveau !

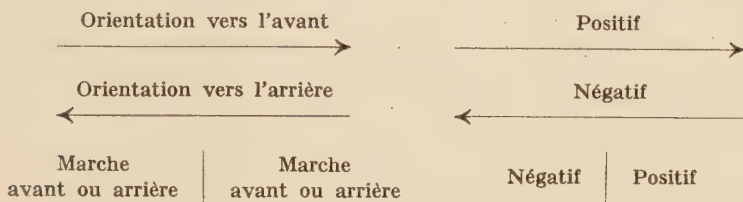
Compréhension de l'enfant

Rappelons que, dans cette expérience, le sujet est placé tout près de l'origine. On ne l'autorise plus à se déplacer.

On se rappelle également que sujet et expérimentateur sont tournés dans la direction de l'un des points d'arrivée de la voiture, point désigné par le nom « en avant », puisqu'il se trouve en avant par rapport au sujet, alors que l'autre point d'arrivée, qui se trouve à l'opposé du premier est désigné par le terme « en arrière », du fait aussi qu'il se trouve en arrière par rapport au sujet.

Le facteur nouveau qui intervient et qui ne se trouvait pas dans l'expérience du stade représentatif préopératoire est donc ce système de signification se rapportant à la position qu'occupe l'enfant et faisant intervenir les termes « en avant » et « en arrière ». L'enfant n'a plus maintenant deux points de vue successifs, mais une position fixe, au centre de la salle d'expérience. Cette situation résulte du fait que le sujet constitue lui-même un système de références unique établissant un

lien entre les diverses opérations. Le parallèle avec la règle des signes est maintenant complet; il suffit de penser avec l'expérimentateur que le terme « en avant » correspond au « plus » mathématique et le terme « en arrière » au « moins » mathématique. Nous avons ainsi le schéma de la règle des signes :



Sur le plan du jeu, l'enfant réussit très bien les quatre formes de la règle des signes, soit :

1. Voiture dirigée vers l'avant, marche avant, arrivée en avant.
2. Voiture dirigée vers l'arrière, marche arrière, arrivée en avant.
3. Voiture dirigée vers l'avant, marche arrière, arrivée en arrière.
4. Voiture dirigée vers l'arrière, marche avant, arrivée en arrière.

Dans l'esprit de l'expérimentateur, ces formes représentent la règle des signes, soit : $+. + = +$ $- . - = -$ $- . + = -$.

La technique de cette expérience implique de la part de l'enfant une formulation ou traduction verbale des faits, mais, bien entendu, seulement en termes d'« avant » et d'« arrière ». Disons en résumé que l'enfant du début du stade concret (7 ans) n'y parvient que par réponses isolées ou par couples de solutions, mais qu'il n'est pas encore capable de donner les quatre solutions ensemble.

Il en reste en somme, sur le plan verbal, au niveau où il en était, du point de vue du jeu : au stade représentatif préopératoire, puisqu'il n'arrive pas à dépasser le nombre de deux des formes de la règle.

2. LA VOITURE, EXPÉRIENCE b') (DONT LE BUT EST PLACÉ EN AVANT OU EN ARRIÈRE DU SUJET, AVEC TABLEAU)

Cette expérience constitue la suite de l'expérience b) précédente, dans ce sens qu'elle utilise le même dispositif et la même technique, mais en faisant intervenir un élément nouveau sous la forme d'un tableau que les sujets seront appelés à remplir, ce qui les habituera à grouper les solutions dans une disposition analogue à celle des signes algébriques, mais sans utiliser encore ces signes eux-mêmes. Cette expérience forme ainsi une transition entre celles qui ne font pas encore intervenir les signes algébriques et celles qui en proposent l'emploi aux sujets.

Dispositif et technique

Le dispositif et la technique sont, comme nous venons de le dire, les mêmes que dans l'expérience *b*) (voir page 70), mais avec l'adjonction de la question suivante : On demande à l'enfant combien il y a de possibilités en tout, c'est-à-dire de combien de façons différentes la voiture peut circuler sur la route. L'enfant ne peut généralement pas répondre immédiatement ou ne peut indiquer que l'une ou l'autre des solutions. L'expérimentateur l'aide alors de ses suggestions, jusqu'à ce que les quatre solutions correctes aient été inscrites dans chacune des trois rubriques :

orientation	marche	arrivée
-------------	--------	---------

Résultats

Cette question est résolue par les enfants de 7 ou 8 ans. Avec l'aide de l'expérimentateur, ils parviennent ainsi à établir le tableau correspondant à la règle des signes.

Age	Réussites	Nombre de sujets
6-7	1	6
7-8	4	6
8-9	5	6
		18 Total

3. LA VOITURE, EXPÉRIENCE *c*) (AVEC JETONS)*Dispositif*

Une bande de carton de couleur bleue d'un mètre cinquante sur trente centimètres environ, divisée dans sa longueur en huit parties de dix centimètres de largeur séparées entre elles par des bandes de cinq centimètres de largeur d'une autre couleur. Cette bande sert de route.

Une voiture de cinq centimètres de longueur (correspondant à la largeur des bandes de séparation) pouvant rouler en marche avant et en marche arrière; un drapeau rouge placé à l'extrémité droite de la route (par rapport au sujet), la route s'étendant dans le sens de sa longueur de gauche à droite devant le sujet. Un drapeau bleu à l'extrémité gauche de cette même route; un garage, que l'on place au bord de la bande de carton, au milieu de sa longueur, lequel marque le point de départ de la voiture. Deux boîtes : une série de jetons rouges et une série de jetons bleus, jetons isolés, en paquets de 2, de 3 ou de 4.

Technique

On raconte à l'enfant que la voiture va circuler sur la route et que chaque fois qu'il voudra la faire avancer d'une étape (soit d'un des

huit intervalles entre les bandes de cinq centimètres de largeur), il devra être en possession d'un jeton. Ces jetons sont distribués par l'expérimentateur, qui les prend dans une boîte et qui les dépose au fur et à mesure dans une autre boîte, tout ceci à la vue de l'enfant.

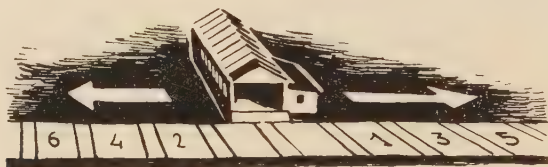
La voiture est à son point de départ, devant le garage. (Il y a donc, devant et derrière elle, quatre intervalles de dix centimètres chacun.) On explique à l'enfant que chaque fois que la voiture avance dans la direction du drapeau rouge, c'est-à-dire que le chauffeur voit le drapeau rouge à travers les vitres de devant de la voiture (pare-brise), il faut mettre des jetons rouges dans la boîte, un jeton par intervalle parcouru. On lui donne un exemple : on met deux jetons rouges dans la boîte, ce qui signifie que la voiture parcourt deux intervalles en direction du drapeau rouge; l'expérimentateur la fait donc avancer. Puis il propose au sujet de la faire avancer encore d'un intervalle, en lui faisant remarquer que pendant ce temps, il met un jeton dans la boîte. Et l'on continue ainsi, l'expérimentateur mettant des jetons dans la boîte et le sujet faisant avancer la voiture. Après avoir mis des jetons rouges dans la boîte, l'expérimentateur en met des bleus et explique au sujet que ces jetons représentent un trajet dans la direction du drapeau bleu. (Il s'agit toujours du drapeau que le chauffeur voit au travers du pare-brise). Il demande alors au sujet de faire avancer la voiture.

On joue ainsi jusqu'au moment où le sujet a bien compris cette partie de la technique, ce dont il est facile de se rendre compte puisque c'est lui qui fait exécuter les trajets à la voiture au fur et à mesure que l'expérimentateur met des jetons dans la boîte.

Après avoir mis des jetons dans la boîte, on passe à un nouvel exercice qui consiste à en enlever, en expliquant au sujet qu'enlever des jetons correspond à faire reculer la voiture. Lorsque le chauffeur voit le drapeau rouge à travers le pare-brise, ce sont des jetons rouges qu'il faut enlever; lorsqu'il voit le drapeau bleu, on enlève, pour la faire reculer, des jetons bleus. Enlever des jetons consiste à les sortir de la boîte dans laquelle on les avait mis et à les poser sur la table. On continue ainsi à jouer en mettant ou ôtant des jetons ce qui correspond à l'avance ou au recul de la voiture.

Les exercices terminés, l'expérimentation commence : La voiture est placée devant le garage et est orientée vers le drapeau rouge. L'expérimentateur pose un drapeau blanc sur le deuxième espace de cinq centimètres de largeur, à partir du garage et toujours en direction du drapeau rouge. Il demande alors à l'enfant combien il y a de façons de rouler du garage au drapeau blanc. L'expérimentateur observe le jeu de l'enfant. Il se peut que celui-ci ne songe qu'à l'une des deux solutions (avancer en ajoutant des jetons rouges); dans ce cas, l'expérimentateur lui suggère l'autre (retourner la voiture et reculer en enlevant des jetons bleus). Mais, en général, les enfants donnent immédiatement les deux

solutions. Puis l'expérimentateur procède de la même façon et pose les mêmes questions à propos du deuxième espace de cinq centimètres en direction du drapeau bleu, du troisième espace en direction du drapeau rouge et, enfin, du troisième espace en direction du drapeau bleu, toujours en utilisant le drapeau blanc pour délimiter les étapes. Il demande ensuite au sujet de lui montrer les différentes manières d'arriver au drapeau rouge (quatrième espace de cinq centimètres à partir du garage), puis au drapeau bleu (quatrième espace de cinq centimètres à partir du garage). On pose donc au total six questions à l'enfant, selon le schéma suivant :



Résultats

Nous avons interrogé des enfants de 7 à 9 ans. Dès 8 ans et demi environ, ce test est résolu, c'est-à-dire que nos sujets répondent correctement aux six questions.

Age	Réussites	Nombre de sujets
7-8	1	5
8-9	4	5
		10 Total

Pour qu'un sujet donne une réponse correcte, il faut qu'il ait bien compris que cela revient au même, pour la première réponse par exemple, d'ajouter des jetons rouges ou d'enlever des jetons bleus, et deux de chaque espèce. Ce qui revient à dire qu'il s'agit des deux trajets de même longueur et de même sens.

La tâche est grandement facilitée du fait qu'il s'agit d'une voiture et que, comme nous le disions à propos de l'expérience *b)* (voir page 70), les enfants de 7 ans sont capables de penser aux deux façons de rouler. L'expérience *a)* (voir page 53) nous a même montré que des enfants de 5 ans peuvent déjà y parvenir. Quant à l'équivalence numérique, la tâche du sujet est facilitée par l'emploi des jetons, chacun d'eux représentant un des intervalles parcourus par la voiture.

Il est intéressant de constater qu'avec cette expérience, les sujets de 8 ans et demi déjà peuvent coordonner les sens et les nombres et même faire de petites multiplications numériques telles que celle-ci : deux paquets de deux jetons correspondent à quatre intervalles.

Protocole de l'un des sujets interrogés

REN. 8 ans 2 mois.

Que faut-il faire avec les jetons pour que la voiture ait le droit de rouler du garage au drapeau (situé à deux étapes du garage et du côté du drapeau rouge) ?

Mettre trois jetons rouges.

Pour deux étapes !

Ah ! non : deux rouges.

Ou bien ?

Deux bleus.

Mettre ou enlever ?

Enlever deux bleus.

Et pour arriver au drapeau lorsque je le place ici (à deux étapes du garage, du côté du drapeau bleu) ?

Mettre deux bleus.

Ou enlever deux bleus.

Quelle est la couleur que le chauffeur voit ?

Ah ! non, enlever deux rouges !

Que faut-il faire avec les jetons pour que la voiture ait le droit de rouler du garage au drapeau (situé à trois étapes du garage, du côté du drapeau rouge) ?

Mettre trois rouges.

Ou marche arrière, enlever trois rouges ; non : enlever trois bleus.

Et pour atteindre le drapeau placé ici (à trois étapes du garage, côté du drapeau bleu) ?

Mettre trois bleus.

Ou enlever... trois rouges.

Que faut-il faire pour que la voiture puisse rouler du garage au drapeau rouge (situé à quatre étapes du garage) ?

Mettre quatre rouges.

Ou enlever trois bleus.

Trois ?

Non quatre bleus.

Et pour atteindre le drapeau bleu (situé à quatre étapes du garage) ?

Mettre quatre bleus.

Ou enlever quatre bleus ; non : enlever quatre rouges.

Montre-moi quelles sont les différentes façons de faire pour arriver au drapeau (situé à deux étapes du garage, du côté du drapeau rouge).

Mettre deux rouges.

Ou bien ?

Enlever deux bleus.

Et pour atteindre le drapeau si je le place ici (à trois étapes du garage, du côté du drapeau bleu) ?

Mettre trois bleus.

Ou bien ?

Enlever trois rouges.

Et pour atteindre le drapeau rouge (à quatre étapes du garage) ?

Mettre quatre rouges.

Ou bien ?

Enlever quatre bleus.

Et enfin pour atteindre le drapeau bleu (situé à quatre étapes du garage) ?

Mettre quatre bleus.

Ou bien ?

Enlever quatre rouges.

Il s'agissait, on l'a vu, d'un enfant de l'âge de 8 ans 2 mois seulement. Bien qu'au début il ait éprouvé de grandes difficultés à répondre et commis quelques erreurs, soit dans l'action d'enlever ou d'ajouter, soit dans le choix de la couleur, soit enfin dans le calcul du nombre de jetons, il a fini par résoudre les petits problèmes qui lui étaient posés.

Compréhension de l'enfant

Les résultats de nos expériences montrent en effet, qu'à partir de 8 ou 9 ans, le sujet est capable d'intégrer la multiplication numérique dans le cadre d'une représentation de la règle des signes, telle que celle de l'expérience de la voiture. Il est capable d'expérimenter en jouant les quatre formes de la règle des signes, et de parler de ces quatre formes en même temps que d'une multiplication de nombres.

La multiplication numérique intervient dans ce sens que la distance parcourue par la voiture s'exprime en paquets de jetons : deux paquets de trois jetons par exemple.

On se rappelle qu'il s'agissait de poser et d'ôter des jetons de deux couleurs différentes, rouge et bleu, correspondant aux divers mouvements de la voiture se dirigeant vers deux petits drapeaux.

On se souvient également que dans l'esprit de l'expérimentateur la couleur rouge correspond au signe plus et la couleur bleue au signe moins.

Le sujet découvre les deux sortes d'équivalences suivantes. Il se rend tout d'abord compte, d'une part :

qu'ajouter des jetons rouges ou enlever des jetons bleus, revient au même, c'est-à-dire que le même but, à savoir le drapeau rouge, est atteint (en termes mathématiques : $+. +$ et $-. - = +$) et d'autre part,

qu'ajouter des jetons bleus ou enlever des jetons rouges, revient au même, c'est-à-dire que le même but, le drapeau bleu, est atteint (en termes mathématiques : $+. -$ et $- . + = -$).

Mais le sujet se rend compte, dès la première de ces quatre formes qu'il exécute, que le nombre des jetons est toujours le même. Il prend donc automatiquement le même nombre de paquets de jetons pour les deux termes de l'équivalence. Ce qui, dans l'esprit de l'expérimentateur revient à dire que

si l'on multiplie un certain nombre de paquets de jetons positifs par un nombre positif ou le même nombre de paquets de jetons négatifs par le même nombre négatif, on obtient le même résultat, à savoir que le produit sera toujours le même nombre de jetons positifs;

si l'on multiplie un certain nombre de paquets de jetons positifs par un nombre négatif ou le même nombre de paquets de jetons négatifs par le même nombre de positifs, on obtient le même résultat, à savoir que le produit sera toujours le même nombre de jetons négatifs.

L'enfant de cet âge ne l'exprime naturellement pas en signes, mais en termes de jetons, selon les correspondances que nous avons données plus haut. La règle des signes est donc tout à fait complète dans cette expérience, mais revêtue d'une forme concrète.

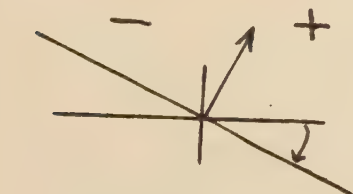
4. LA BALANCE, EXPÉRIENCE a') (AVEC TABLEAU)

Dispositif

Même dispositif que dans l'expérience précédente (voir expérience page 59).

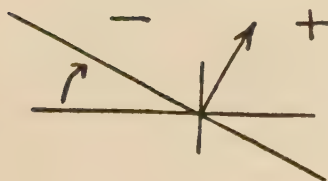
Technique

Voici un tableau des quatre formes du jeu correspondant à la règle des signes :



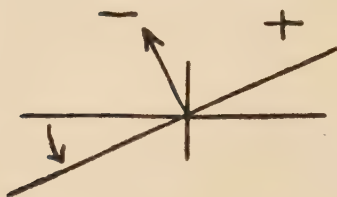
Ajouter un poids du côté positif :
l'aiguille va sur le signe plus.

+ + +



Enlever un poids du côté négatif :
l'aiguille va sur le signe plus.

- - +

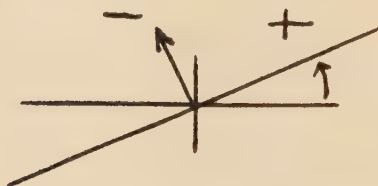


Ajouter un poids du côté négatif :
l'aiguille va sur le signe moins.

+

—

—



Enlever un poids du côté positif :
l'aiguille va sur le signe moins.

—

+

—

1. L'expérimentateur demande au sujet d'agir :
 - A. a) Fais en sorte que l'aiguille aille sur le signe plus (la croix, pour les jeunes sujets).
 - b) Tâche de trouver un autre moyen pour arriver au même résultat.
 - c) Tâche de trouver encore un autre moyen (le sujet évidemment n'en trouve pas d'autre).
 - d) Montre-moi combien il y a de possibilités.
 - B. a) Fais en sorte que l'aiguille aille sur le signe moins (la barre, pour les jeunes sujets).
 - b) Tâche de trouver un autre moyen pour arriver au même résultat.
 - c) Tâche de trouver encore un autre moyen (le sujet ne peut le trouver).
 - d) Montre combien il y a de possibilités différentes.
 - C. Montre-moi maintenant combien il y a de possibilités au total, pour les deux côtés de la balance.
2. Le sujet explique ses actes :

Que se passe-t-il si tu mets une boîte d'allumettes du côté de la croix ?

Dis-moi ce qui se passe pour les autres formes du jeu.
3. Le sujet traduit en signes ses observations.
 - a) L'expérimentateur explique au sujet que le terme « ajouter » revient à dire « plus » et que le terme « enlever » revient à dire « moins ». On peut appeler le côté du signe plus « côté positif » et le côté du signe moins « côté négatif ». L'aiguille donne le résultat de ces opérations en montrant les signes plus ou moins. L'expérimentateur demande au sujet de donner ainsi les différentes formes de la règle des signes, sans faire de phrases, en énumérant

simplement les signes. Par exemple, au lieu de dire : « J'ajoute un poids du côté plus », il dira : « Plus du côté plus : l'aiguille va sur le plus » ou, plus simplement encore : « Plus du côté plus donne plus », ou même : « Plus, plus, plus ».

b) L'expérimentateur dresse le tableau suivant :

<i>Poser :</i> +	<i>Côté :</i> +	<i>Aiguille :</i> +
<i>Oter :</i> —	—	—

Il explique au sujet ce dont il s'agit et lui demande de remplir ce tableau de signes, en donnant successivement chacune des quatre formes de la règle des signes.

- c) L'expérimentateur demande ensuite au sujet de lui dire, d'après le tableau, quand le résultat est positif; puis, lorsque le sujet a répondu à cette question, il lui demande de dire quand le résultat est négatif, ceci en s'aidant du tableau.
- d) Le sujet doit dire quand l'aiguille ira sur le signe plus et quand elle ira sur le signe moins; le sujet doit donc dire d'abord comment il faut faire pour arriver à un résultat : « aiguille sur le signe plus » et ensuite « aiguille sur le signe moins » (cette question ramène l'enfant à la balance).
- e) L'expérimentateur demande enfin à l'enfant de ne formuler que les signes nécessaires pour obtenir un résultat positif, puis pour obtenir un résultat négatif.

Protocoles de trois des sujets interrogés

Ici encore, nous donnons quelques résumés de protocoles et un protocole entier.

D'abord les résumés :

I. MON., 6 ans 2 mois : Nous classons ses réponses selon l'ordre des questions, telles qu'elles sont données ci-dessus dans la technique.

1. Le sujet agit :

- A. $\left. \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \right\}$ Le sujet se trompe d'abord, puis exécute correctement les deux façons de faire pour que l'aiguille aille sur le signe plus.

- B. $\left. \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \right\}$ Le sujet exécute correctement les deux actions possibles pour que l'aiguille aille sur le signe moins.
- C. Le sujet donne les deux possibilités pour l'un des côtés de la balance, mais se trompe pour l'autre côté.
2. Le sujet explique ses actes :
Le sujet ne parvient à aucune solution convenable; il n'arrive donc pas à aller plus loin dans l'expérience.

II. VIV., 6 ans 9 mois :

1. Le sujet agit :
- A. $\left. \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right\}$ Le sujet exécute les deux actions nécessaires pour obtenir le signe plus de deux façons différentes.
- B. $\left. \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right\}$ Le sujet exécute les deux actions nécessaires pour obtenir le signe moins de deux façons différentes.
- C. Le sujet n'arrive pas à donner toutes les possibilités.
2. Le sujet explique ses actes :
Trois réponses sont immédiatement justes, tandis que la quatrième : « enlever un poids du côté du signe moins fait aller l'aiguille sur le signe plus » est fausse d'abord, puis juste ensuite.
3. Le sujet traduit en signes ses observations :
- a) La traduction en signes est entièrement juste.
- b) Le sujet remplit correctement le tableau.
- c) Le sujet ne sait pas dire quand le résultat est positif et quand il est négatif. Il se contente de lire une ligne après l'autre en disant : « ça c'est une ligne de croix, pi ça une ligne de barres; une ligne de deux, pi une ligne de deux. »
L'expérimentateur aide alors le sujet en lui demandant de lui dire ce qu'il faut pour avoir une croix comme résultat, pour que la croix soit le point où l'on arrive. Le sujet répond qu'il faut « une ligne de croix ». L'expérimentateur lui demande alors si l'on peut faire autre chose pour avoir une croix comme résultat.
Réponse : « Pour faire la barre, il faut une ligne de barres. » Ce qui est évidemment faux !

III. JEA., 7 ans 1 mois :

1. Le sujet agit :
- A. $\left. \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \right\}$ Le sujet donne de bonnes réponses.

- B. $\left. \begin{array}{l} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \right\}$ Le sujet donne de bonnes réponses.
- C. La réponse du sujet est juste, il donne les quatre formes du jeu.
2. Le sujet explique ses actes :
L'enfant fait une faute. Lorsqu'il s'agit d'enlever la boîte d'allumettes du côté de la barre, il dit que l'aiguille ira sur le signe moins.
3. Le sujet traduit en signes ses observations :
- a) Une faute, mais le sujet se corrige immédiatement. (Il s'agit toujours de l'erreur à propos de : « moins du côté moins : l'aiguille va sur le plus ».)
- b) La réponse du sujet est bonne : il remplit correctement le tableau de signes.
- c) La question n'est pas comprise par le sujet. Il ne remarque qu'un signe aux deux premières lignes du tableau, en disant : « Là il n'y a qu'un plus », et dit à propos de la troisième ligne : « Pour les moins, il y en a deux là. » Voici l'ordre dans lequel ce sujet a donné les quatre formes de la règle des signes dans son tableau :

$$\begin{array}{cccc}
 - & + & = & - \\
 + & - & = & - \\
 - & - & = & + \\
 + & + & = & +
 \end{array}$$

- d) Le sujet ne fait aucune faute.
- e) La traduction en signes reste difficile, impossible même pour les résultats négatifs. L'élève reste accroché lorsqu'il s'agit de manier les signes et, pourtant, il vient d'en faire un tableau complet. Il a cependant très bien compris le jeu, agit et parle facilement à ce propos.

Voici le protocole complet de l'interrogation de ce sujet :

JEA., 7 ans 1 mois :

1. A. a) Que faut-il faire pour que l'aiguille aille sur la croix ?
En mettre point de ce côté (= en enlever une, gauche).
- b) Peux-tu faire autre chose pour que l'aiguille aille sur la croix ?
En mettant de ce côté (droit).
- c) Peux-tu faire autre chose encore pour que l'aiguille aille sur la croix ?
.....
- d) Combien y a-t-il de possibilités ?
Deux pour arriver à la croix.

B. a) Que peux-tu faire pour que l'aiguille aille sur la barre ?

En enlevant une de ce côté (droit).

b) *Ou bien en mettant une ici (gauche).*

c) Peux-tu faire autre chose ?

.....

d) Combien y a-t-il de possibilités ?

Deux pour arriver au moins.

C. Combien de possibilités y a-t-il en tout ?

Deux pour arriver à la croix et puis deux pour arriver au moins.

Très bien; lesquelles ?

Pour la croix, j'ai ôté celle-ci (gauche), j'en ai rajouté une là (droite).

Pour la barre ?

J'ai ôté celle-ci (droite) et rajouté une de ce côté (gauche).

Combien y a-t-il de possibilités en tout ?

Quatre.

2. Que se passerait-il si tu mettais une boîte d'allumettes du côté de la croix ?

Ça fait aller l'aiguille sur le côté plus.

Que pourrait-on faire encore ?

Pour arriver du côté moins, il faut ajouter une boîte d'allumettes du côté moins et ça met l'aiguille au moins.

Oter celle du côté de la croix, pour que l'aiguille aille du côté moins.

Je les ai dit les quatre !

Et ôter du côté moins ?

L'aiguille va sur le côté du moins (faux).

3. a) Disons maintenant qu'ôter égale moins et que mettre égale plus. Nous dirons aussi de quel côté nous mettons ou enlevons : du côté plus ou du côté moins, selon les signes du tableau. Le résultat est donné par l'aiguille : plus ou moins. Fais-le avec une boîte d'allumettes pour les quatre possibilités différentes, sans faire de phrases, en ne donnant que les signes.

Plus plus égale plus.

Oter une boîte (gauche) pour plus : moins moins égale moins...

Oh ! non : égale plus !

Et encore ?

Pour faire moins :

Oter (droite), ça fait moins plus égale moins.

Très bien.

Plus moins ça fait moins.

b) Veux-tu remplir ce tableau ?

(Il le remplit comme suit.)

—	+	=	—
+	—	=	—
—	—	=	+
+	+	=	+

c) Quand est-ce que le résultat est un plus ?

Là il n'y a qu'un plus pi là un aussi (première et deuxième ligne) ; pour les moins il y en a deux là (il se contente de lire partiellement le tableau).

d) Que faut-il faire pour que l'aiguille soit sur le plus ?

Ajouter du côté plus.

Ou bien ?

Enlever du côté moins.

e) Et en signes ?

(Le sujet ne répond pas : il voit donc mieux en termes se rapportant à l'expérience et au dispositif.)

(L'expérimentateur l'aide alors en lui disant :) Lis les signes : moins moins, ça fait ?

Plus.

Et ?

Plus plus ça fait plus.

Que veulent dire les signes ?

Oter du côté moins ou rajouter du côté plus.

Et pour que l'aiguille aille sur le moins ?

Oter du côté plus ou bien ajouter du côté moins.

Et pour plus ?

Rajouter deux boîtes d'allumettes de ce côté (droit) ou ôter du côté moins.

Ce sujet est spécialement doué ; il éprouve cependant de la difficulté à s'exprimer en signes et ne parvient pas du tout à raisonner sur ces derniers. Il est obligé constamment de retourner aux termes de l'expérience.

Résultats

Nous avons examiné des sujets de 6 à 8 ans. A partir de 7 ans, les sujets réussissent très bien tant qu'il faut agir et même expliquer ce qui se passe, à condition que ce soit dans leur langage habituel, tandis qu'avec les signes ils sont tout justes capables de remplir le tableau dans lequel ils doivent écrire successivement chacune des quatre formes de la règle des signes.

<i>Age</i>	<i>Réussites</i>	<i>Nombre de sujets</i>
6-7	5	10
7-8	8	<u>10</u>
		20 Total

Pour cette expérience, il n'a pas été nécessaire de changer la technique que nous avons appliquée au stade précédent puisqu'il y avait déjà correspondance complète avec la règle des signes. Inutile donc de dire que sur le plan du jeu l'expérience a été résolue. Sur le plan verbal aussi, c'est l'expérience la plus facilement résolue à 7 ans. L'enfant sait parfaitement nous dire que :

si l'on ajoute du poids du côté du signe plus, l'aiguille va sur le signe plus;

si l'on enlève du poids du côté du signe moins, l'aiguille va sur le signe plus;

si l'on ajoute du poids du côté du signe moins, l'aiguille va sur le signe moins;

si l'on enlève du poids du côté du signe plus, l'aiguille va sur le signe moins.

Quant à la traduction en signes (que nous avons demandée en dernier lieu), les sujets ont été capables de la donner, mais d'une façon très limitée encore.

5. LA BALANCE, EXPÉRIENCE *b*) (AVEC ALLUMETTES ET TABLEAU)

Dispositif

Une petite balance d'épicerie d'enfant; neuf allumettes servant de poids.

La balance est tarée, c'est-à-dire que sur chacun des deux plateaux se trouvent trois allumettes. Devant le dispositif se trouvent encore trois allumettes, qui sont mises à la disposition de l'enfant pour l'expérience.

A droite sur la balance, un signe plus est indiqué, à gauche un signe moins. Le résultat est donné par ces mêmes signes : si le plateau descend du côté du signe plus, le résultat est positif, si au contraire le plateau descend du côté du signe moins, le résultat est négatif.

Technique

1. L'expérimentateur donne un exemple au sujet : « Si je mets trois allumettes de ce côté (côté du signe plus), de quel côté le plateau descendra-t-il ? Le sujet doit ainsi, avant de jouer, deviner ce qui se passera si l'on ajoute des allumettes du côté positif.

2. L'expérimentateur demande au sujet de lui donner toutes les possibilités de jeu différentes, lui faisant remarquer qu'il peut mettre ou ôter trois allumettes, mais que chaque fois qu'il vient de faire un exercice, il doit remettre les choses telles qu'elles étaient au début (ceci afin que la balance reste tarée).

3. Le sujet doit maintenant utiliser les signes pour s'exprimer. L'expérimentateur lui explique qu'ajouter revient à dire plus et qu'enlever revient à dire moins. Il lui donne un exemple : « Moins trois allumettes du côté plus, le plateau descend du côté moins. » (Remarquer qu'on ne dit plus : « En ôtant trois allumettes », mais « Moins trois allumettes ».)

4. L'expérimentateur demande au sujet de ne plus donner que les signes, sans contexte, par exemple : « Plus, plus, plus ».

5. L'expérimentateur propose un tableau au sujet et lui demande de le remplir en signes. Voici le schéma et la légende de ce tableau :

<i>Action</i>	<i>Côté</i>	<i>Plateau baissé</i>
Poser +	Signe +	Côté du signe +
Oter —	Signe —	Côté du signe —

6. Le sujet doit étudier le tableau et dire combien de possibilités différentes s'offrent pour obtenir un résultat positif; puis pour obtenir un résultat négatif. Cette question porte donc sur l'équivalence en signes.

Protocoles de deux des sujets interrogés

Il s'agit de résumés de protocoles :

I. ROB., 9 ans 7 mois :

1. Le sujet donne des réponses justes aux quatre questions de l'expérimentateur.

2. Trois possibilités différentes sur quatre sont données par le sujet.

3. Trois réponses sur quatre sont justes, avec signes.

4. Les quatre formules en signes sont justes; la quatrième cependant a dû être demandée par l'expérimentateur.

5. Le sujet remplit correctement le tableau.

6. Le sujet répond qu'il y a deux fois plus (lisant le tableau par colonnes) et deux fois moins (première colonne). Il n'a donc pas compris la question. Les signes n'ont plus de signification pour lui, il ne voit plus la relation avec la balance. L'expérimentateur a beau tout essayer, ramener le sujet aux résultats donnés par la balance, celui-ci ne donne aucune réponse convenable quant à l'équivalence en signes.

II. LOU., 9 ans 10 mois :

1. Le sujet donne deux réponses justes.
2. Le sujet croit qu'il y a trois possibilités différentes au total.
3. La formulation en signes est satisfaisante, sauf que le sujet est arrêté lorsqu'il s'agit de la forme « enlever du côté moins ». Il s'exprime ainsi : « Mais ça descend du côté plus, et il y en a moins, ça va pas ! », et encore : « Il y en a moins, pi ça descend du côté plus ! »
4. Le sujet ne parvient pas à donner la traduction en signes seulement.
5. Le tableau par contre est donné correctement.
6. Le sujet ne répond pas correctement à cette question portant sur l'équivalence en signes.

Résultats

Cette recherche est intéressante du fait qu'elle met en évidence la difficulté que présente la forme : enlever du côté négatif, difficulté qui se présente dans la règle des signes elle-même. Les sujets ont été visiblement gênés par le fait qu'enlever un poids du côté négatif donne un résultat positif. Le protocole de l'enfant de 9 ans 10 mois, que nous avons rapporté, le montre clairement; le sujet traduisait ainsi sa surprise : « Mais ça descend du côté plus et il y en a moins, ça va pas ! »

Avant 11 ans déjà, les sujets sont capables de remplir le tableau de signes, mais non pas de raisonner sur ces mêmes signes pour répondre à la question 6.

<i>Age</i>	<i>Réussites</i>	<i>Nombre de sujets</i>
9-10	3	5
10-11	5	6
11-12	5	6
12-13	5	5
		22 Total

La voiture et la balance

Nous n'avons pas procédé exactement de la même façon dans l'expérience de la voiture et dans celle de la balance.

L'expérience de la voiture a en effet été orientée dans le sens de l'équivalence (trois positions différentes des drapeaux : à deux, à trois et à quatre intervalles de l'origine) et de la multiplication numérique (paquets de jetons), tandis que l'expérience de la balance a surtout donné lieu à des exercices sur les signes et leur signification.

Les résultats de ces diverses expériences ont montré que tant l'équivalence que la multiplication numérique sont saisies dès l'âge de 8 ou 9 ans. Il n'en va pas de même lorsqu'il s'agit de traduire l'action en signes mathématiques.

L'enfant est tout juste capable de donner les signes plus et moins et il lui est impossible de raisonner sur ces mêmes termes. Nous assistons ainsi à la naissance d'un raisonnement abstrait : le sujet parvient à remplacer ses phrases concrètes par les signes ou mots que l'expérimentateur lui suggère, mais il oublie aussitôt après la signification que ces signes recouvrent.

Dans l'expérience de la balance, le progrès sur le stade précédent est moins évident que dans l'expérience de la voiture où il est marqué d'abord par le fait que nos sujets coordonnent les deux points de vue opposés. Le lien entre ces deux points est constitué par le fait qu'en utilisant les termes : « avant » et « arrière », qui ne sont tels que par rapport à lui-même, l'enfant considère, comme nous l'avons dit, l'ensemble des opérations comme un tout. Quant au nombre ou plutôt quant à la multiplication numérique, elle n'a été saisie, dans ce contexte de la règle des signes, que dès l'âge de 8-9 ans.

A partir de cet âge, l'expérience que l'enfant réalise sur le plan concret est une exacte représentation de la règle des signes; tous les éléments y sont simultanément, qu'il s'agisse de la multiplication numérique ou de la multiplication de signes. Les expériences de la voiture et de la balance telles qu'elles ont été présentées à cet âge seront reprises au niveau secondaire sans aucune modification, comme illustration de la règle des signes. Il ne restera plus au stade formel qu'à en établir la relation avec les signes eux-mêmes, relation qu'il n'est possible de faire qu'avec des sujets qui ont étudié et compris les termes « positif » et « négatif ».

Piaget déclare que, sur le plan concret, les instantanés du plan représentatif préopératoire se fondent dans un plan d'ensemble et que la réalité entière devient accessible. Comment exprimer mieux ce qui se passe avec notre expérience de la voiture lors du passage du stade représentatif préopératoire au stade concret ? Sur le plan représentatif préopératoire, l'enfant n'avait en effet que la notion de deux des quatre formes de la règle des signes; une grande part de l'expérience lui échappait ainsi, d'autant plus qu'il était incapable de saisir le lien qui unit ces quatre formes. Sur le plan concret, au contraire, comme nous le disions plus haut, l'enfant réalise parfaitement les applications de la règle des signes : le réel dans son entier lui est devenu accessible.

Résumé du stade des opérations concrètes

A ce stade, l'enfant est capable de jouer la règle des signes. Il exécute ainsi même la forme de la règle des signes qui cause le plus de difficulté aux élèves du niveau secondaire, à savoir la multiplication de deux quantités négatives. Remarquons cependant que la plupart des enfants du stade représentatif préopératoire l'avaient déjà comprise. L'enfant,

au stade concret, est donc capable de jouer les quatre formes de la règle des signes.

La relation entre le jeu et la règle des signes mathématique demeure cependant encore inaccessible à l'enfant. L'enfant de cet âge, en effet, n'a encore aucune idée de l'algèbre; pour lui, les termes de positif et de négatif n'ont aucun sens.

III. STADE DES OPÉRATIONS FORMELLES

Il est utile de reprendre ici la discussion que nous avons esquissée dans notre introduction, concernant la distinction qu'il est nécessaire de faire entre les signes propres et opératoires. On se souvient que les signes opératoires plus et moins indiquent l'action ou l'opération d'ajouter ou d'enlever un certain nombre de fois, et que les signes propres plus et moins, donnent le sens des quantités à multiplier (positif ou négatif).

S'agit-il de quatre transformations ? Si oui, le processus de la règle des signes est formel et nous pouvons poser l'hypothèse que la règle des signes ne sera comprise qu'à partir de l'âge de 11 ou 12 ans. Mais tel n'est pas l'avis des mathématiciens¹, qui sont d'accord entre eux pour conclure qu'en fait les deux sortes de transformations reviennent au même et qu'il ne s'agit ainsi que d'un seul et même groupe. Les signes moins, qu'ils soient propres ou opératoires, marquent l'opposé du signe plus et sont ainsi synonymes d'une inversion. La règle des signes est donc le produit d'opérations concrètes.

Au stade formel, il restait cependant à apporter à nos expériences certains éléments essentiels qui manquaient aux expériences du stade concret. Sans que ces expériences fussent modifiées en elles-mêmes, il s'agissait d'en relier les opérations aux abstractions mathématiques et d'observer la façon dont l'enfant de ce stade parviendrait à raisonner (car en cela réside la nouveauté) sur les manipulations concrètes, ou, si l'on préfère, à reconnaître dans ces manipulations l'application concrète des données théoriques qu'il possède sur la règle des signes. Cette manière de considérer nos expériences n'est naturellement possible qu'à partir du moment où nos sujets connaissent les rudiments de l'algèbre. Nous avons utilisé certaines des expériences de la balance et de la voiture que nous avons déjà employées au stade concret et qui se trouvaient représenter l'ensemble de la règle des signes. Pour cette nouvelle utilisation, nous avons ajouté des signes aux expériences qui n'en étaient pas encore pourvues ou nous avons invité l'enfant à le faire lui-même.

¹ Voir p. 15-16.

A ce stade, nous avons approfondi les expériences sur l'équivalence, c'est-à-dire que nous n'avons plus fait porter notre interrogation sur un seul trajet de la voiture, mais sur toute une série de trajets successifs. Au lieu de demander à l'enfant quelles sont les différentes possibilités pour rouler de tel endroit à tel autre, nous avons fait exécuter à la voiture une suite de trajets soit en marche avant, soit en marche arrière, en la ramenant, pour finir, à son point de départ (garage ou autre). Nous avons alors demandé à l'enfant s'il estimait qu'il y avait davantage de jetons rouges (correspondant aux trajets effectués dans le sens où le chauffeur supposé de la voiture voit le drapeau rouge) ou davantage de jetons bleus (correspondant aux trajets effectués dans le sens où le chauffeur supposé voit le drapeau bleu). Ces expériences plus complexes nous permettent de voir à quel point l'enfant a véritablement saisi l'équivalence.

1. LA VOITURE, EXPÉRIENCE *b''*) (DONT LE BUT EST PLACÉ EN AVANT OU EN ARRIÈRE DU SUJET, AVEC TABLEAU ET SYNTHÈSE DE CE TABLEAU)

Cette expérience constitue la suite de l'expérience *b'*) (v. p. 75), en ce sens qu'elle utilise le même dispositif et la même technique, mais en faisant intervenir la question supplémentaire suivante :

L'expérimentateur prie le sujet de bien vouloir résumer le tableau qu'il vient de remplir, d'en donner la synthèse ou l'essentiel, de telle façon qu'on ne soit plus obligé de répéter les quatre formules, mais que l'on comprenne immédiatement comment doit être placée la voiture pour obtenir tel ou tel résultat. S'il le faut, l'expérimentateur énonce encore les deux questions suivantes : Que faut-il faire pour que la voiture arrive en avant ? Que faut-il pour que la voiture arrive en arrière ? Voici le tableau en question :

<i>orientation</i>	<i>marche</i>	<i>arrivée</i>
avant	avant	avant
arrière	arrière	avant
avant	arrière	arrière
arrière	avant	arrière

Résultats

Cette question n'est résolue qu'au stade formel et même assez rarement à cet âge.

<i>Age</i>	<i>Réussites</i>	<i>Nombre de sujets</i>
10-11	3	6
11-12	4	7
12-13	5	6
		19 Total

Les sujets qui ont pu répondre à cette question peuvent être classés en deux catégories :

a) Ceux qui ont de la peine à résoudre cette question et auxquels il faut suggérer la solution en posant la question suivante : « Quelles sont les diverses possibilités pour aller « en avant » ? » Après cette question ou suggestion, ces sujets énumèrent généralement encore une fois les quatre formes de la règle des signes, puis s'aperçoivent tout à coup que c'est lorsque l'orientation et marche sont semblables que la voiture roule vers l'avant.

b) Les sujets qui donnent immédiatement une réponse satisfaisante, comme Ann, âgée de 13 ans et demi qui déclare : « S'il y a quelque chose en arrière et quelque chose en avant, la voiture va en arrière et si les deux premières colonnes sont la même chose, elle va en avant... Il faut deux... je ne sais comment dire... synonymes pour arriver en avant. Pour arriver en arrière, il faut deux contraires. »

Cette question met bien en évidence la difficulté qu'éprouvent nos sujets à raisonner sur des termes, puisqu'une telle classification leur cause tant de difficulté, et que certains d'entre eux ne parviennent même pas du tout à la résoudre.

2. LA BALANCE, EXPÉRIENCE b') (AVEC ALLUMETTES, TABLEAU ET SYNTHÈSE)

Il s'agit de l'expérience décrite à la page 88 et dont la dernière question n'était pas résolue par les enfants du stade concret.

Nous donnions au sujet, on s'en souvient, un système de significations où toutes les opérations effectuées avec la balance se traduisaient par des signes mathématiques.

Le sujet devait d'abord ajouter des signes à l'énoncé des opérations effectuées au moyen de la balance, puis l'expérimentateur lui demandait de ne plus parler qu'en signes, et de remplir un tableau pouvant contenir les quatre formes mathématiques (en signes uniquement).

Résultats

Les résultats ont montré que la formulation de ces sujets est bonne, la traduction en signes aussi, sauf en ce qui concerne la formulation des opérations équivalentes (soit la dernière question de la technique). Cette lacune provient certainement du fait que, pour nos sujets, ce langage n'était pas directement relié à l'expérience concrète. Il faut attendre l'âge de 11 ou 12 ans pour voir des sujets raisonner sur des signes.

<i>Age</i>	<i>Réussites</i>	<i>Nombre de sujets</i>
9-10	0	5
10-11	1	6
11-12	3	6
12-13	4	5
		22 Total

Protocole de l'un des sujets interrogés

Voici le résumé d'un protocole :

CH. 11 ans 2 mois.

1. Le sujet donne trois réponses justes sur quatre questions posées par l'expérimentateur.

2. Le sujet donne bien les quatre possibilités différentes de jeu.

3. La formulation en ajoutant des signes est correcte, sauf que le sujet hésite lorsqu'il s'agit d'enlever un poids du côté négatif. Il donne d'abord le résultat correct, puis veut se corriger et revient tout de même encore une fois au résultat déjà énoncé et qui était juste. L'expérimentateur lui demande pourquoi il a hésité, à quoi le sujet répond : « Parce que ça se peut qu'il y ait trois moins. Non ! c'est parce qu'il y a deux possibilités de chacune » (soit deux résultats positifs et deux résultats négatifs).

4. Les signes sans contexte sont justes.

5. Le sujet remplit correctement le tableau de signes.

6. Le sujet répond immédiatement à la question sur l'équivalence en regardant le tableau de signes. Il s'exprime ainsi : « Quand on enlève du côté moins et puis quand on met du côté plus » et : « Quand on enlève du côté plus et met du côté moins. » Ce sujet ne parle pas uniquement en signes, il y mêle des termes de l'expérience de la balance. Ceci montre qu'en regardant le tableau, l'enfant a immédiatement reconnu le sens des signes.

L'expérimentateur insiste cependant et demande à l'enfant de ne donner que les signes. Le sujet donne alors deux réponses justes sur quatre, en disant que c'est difficile « parce qu'il faut être tellement à son affaire ».

Si nous comparons l'attitude de ce sujet devant la question 6 avec celle des sujets du stade concret, nous voyons qu'il y a toute la distance de la non-compréhension à la compréhension des termes employés. Ce sujet, qui est âgé de 11 ans seulement, montre par ses explications qu'il reconnaît la signification des signes auxquels se rapportent les exercices. Il parvient ainsi à répondre correctement à l'expérimentateur qui lui demande notamment de grouper les signes selon un certain ordre.

La voiture et la balance

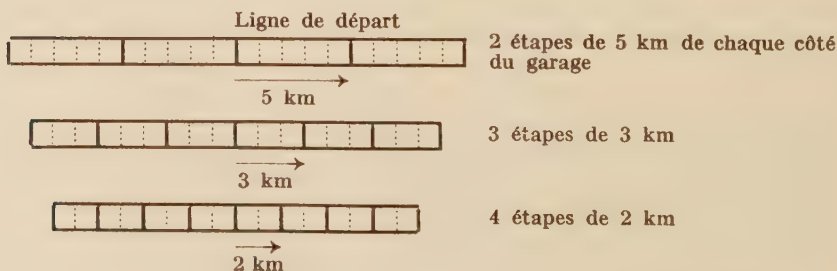
Au stade formel, nous avons étudié jusqu'ici deux expériences : l'une mettant en jeu la voiture et l'autre la balance. Nous avons commencé par la voiture, en employant la technique utilisée dans l'expérience qui était résolue sur le plan concret à 7 ans. Ainsi, le sujet jouait, puis formulait ses opérations en utilisant les termes de « devant » et « derrière ».

Les résultats ont été les suivants : La formulation est bonne, tandis que la traduction en termes de « devant » et de « derrière », « avant » ou « arrière », comporte des erreurs assez nombreuses. L'enfant parvient tout de même à remplir le tableau. Mais, lorsqu'il s'agit de grouper les termes en vue d'une certaine solution, c'est-à-dire de raisonner sur des termes, une faute en déclenche d'autres et une observation de l'expérimentateur n'a qu'un effet momentané. Très vite le sujet succombe aux pièges que comporte la traduction des opérations dans les termes exigés par l'expérimentateur. Cette recherche a nettement mis en évidence la difficulté de la multiplication d'une quantité négative par une quantité négative.

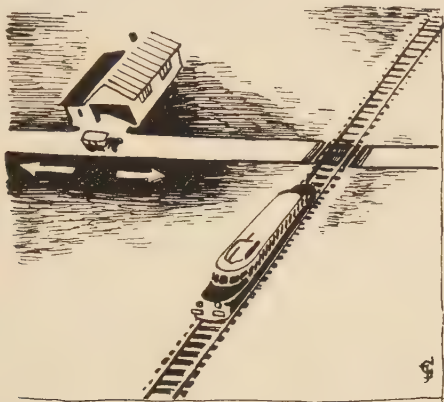
Nous avons vu qu'au stade formel, cette expérience est résolue, de même que l'expérience de la balance, dans laquelle on fait intervenir les termes de plus et de moins, qui sont plus naturels avec ce dispositif. Ces recherches sont relativement simples puisqu'elles ne font pas intervenir la multiplication numérique. Nous avons repris l'expérience de la voiture mais, cette fois, avec les termes de positif et négatif, et en y ajoutant la multiplication de petits nombres. Voici cette expérience :

3. LA VOITURE, EXPÉRIENCE *d*) (COMPORTANT LES SIGNES ALGÈBRIQUES)*Dispositif*

Une voiture avec marche avant et arrière; trois routes, sur lesquelles sont inscrites des étapes, des kilomètres et une ligne de départ (ces routes sont en carton et correspondent à la grandeur de la voiture) :



Un train, une ligne de chemin de fer. Le tout est disposé selon le croquis.



On constate que la route utilisée est placée perpendiculairement à la ligne de chemin de fer, que la voiture est stationnée au point de départ (garage) et que le train est sur les rails. Les trois routes sont employées successivement.

Technique

L'expérimentateur donne l'explication suivante au sujet : « Dans la voiture se trouve une famille qui se rend à la gare, laquelle est située à l'angle des rails et de la route. La famille se compose des parents et des enfants. Chacun des enfants désire conduire la voiture. Les parents sont d'accord mais à condition qu'il n'y ait pas de dispute. C'est ainsi que les enfants se partagent équitablement le trajet à parcourir. Ce trajet est divisé en étapes d'égale longueur. La première route, par exemple, comporte deux étapes de cinq kilomètres chacune, c'est-à-dire qu'elle mesure dix kilomètres et qu'il y a deux enfants à contenter.

Nous faisons alors remarquer au sujet qu'il existe plusieurs manières de faire partir la voiture : On peut la faire démarrer en marche avant ou en marche arrière, ce qui revient à reculer. Nous voulons exprimer exactement le trajet que la voiture parcourt. Nous employons à cet effet des nombres pour indiquer les étapes et les kilomètres, et des signes pour désigner la marche, l'orientation et l'arrivée de la voiture. Il s'agit des signes : plus et moins ou positif et négatif. Au départ, si le moteur de la voiture est dirigé vers la gare, nous disons que cette position est positive ; si, au contraire, le moteur est dirigé en sens opposé à la gare, nous disons que cette position est négative. D'autre part, si la voiture

fait marche avant, nous disons que sa façon d'avancer est positive, tandis que si elle fait marche arrière, nous disons que sa façon d'avancer est négative. Nous disons que lorsque le but est atteint (c'est-à-dire la gare), le résultat est positif, et qu'au contraire, lorsque le but n'est pas atteint, le résultat est négatif. Nous donnons au sujet un tableau de ces règles du jeu :

Arrivée à la gare	positif
Arrivée en un lieu opposé à la gare	négatif
Départ : voiture orientée vers la gare	positif
Départ : voiture orientée en sens opposé à la gare	négatif
Marche avant	positif
Marche arrière	négatif

Résultats

Les sujets de 11 à 12 ans parviennent à traduire les différents trajets de la voiture en termes algébriques. Mais ils le font encore avec difficulté et doivent passer par de longs tâtonnements pour chaque nouveau trajet qu'ils veulent exprimer.

Age	Réussites	Nombre de sujets
10-11	2	5
11-12	5	6
		11 Total

Les difficultés les plus importantes sont les suivantes :

1. Difficulté de mettre un signe devant chaque chiffre. Nos sujets oublient souvent de mettre un signe, soit au multiplicande, soit au multiplicateur.

2. Difficulté de passer du langage habituel au langage mathématique. Souvent les explications de nos sujets sont correctes quand elles sont exprimées à leur manière personnelle, et fausses, exprimées en langage mathématique.

3. Difficulté provenant de notre troisième règle, à savoir que la marche avant est considérée comme positive et la marche arrière comme négative. Au cours de l'expérience, les sujets remplacent souvent cette règle par la suivante : l'orientation de la voiture vers la gare est considérée comme positive, son orientation dans le sens opposé à la gare est considérée comme négative. Ce changement provoque des résultats tels que : « moins par plus égale plus », ce qui ne correspond pas à la règle des signes. C'est ainsi que le sujet assimile le cas de la marche au cas de

l'orientation de la voiture. Cette difficulté concerne toujours, comme on le voit, l'inversion d'une inversion.

Les deux autres règles du jeu sont plus facilement admises, car elles sont fixées par rapport à un critère extérieur à la voiture, qui est la gare.

Dans cette expérience, la difficulté de traduire correctement les résultats en signes est plus grande que dans les expériences précédentes. Ainsi les enfants du début du stade formel qui n'ont pas encore reçu un enseignement d'algèbre sont incapables de raisonner sur des termes algébriques lorsque ceux-ci sont accompagnés de multiplication numérique. Leur attitude rappelle ainsi celle des enfants du début du stade concret qui, dans leur jeu, sont incapables de coordonner la règle des signes concrète avec les nombres.

Cependant la multiplication numérique placée dans un contexte concret est déjà résolue à huit-neuf ans. Nous sommes donc bien obligée de constater que la difficulté principale réside dans le fait qu'il faut attribuer des signes au multiplicateur et au multiplicande :

Supposons qu'il s'agisse du trajet : garage (centre de l'expérience ou origine) — gare. Si le sujet commence par orienter la voiture dans la direction de la gare, il dit : « Voiture tournée vers la gare : plus », « Marche avant : plus », « Arrivée à la gare : plus ».

Mais lorsqu'on passe à la seconde question, les choses se compliquent souvent déjà. Au lieu de dire : « Marche arrière : moins », « Voiture orientée vers un lieu opposé à la gare : moins », « Arrivée à la gare : plus », le sujet répond souvent :

« Marche arrière : moins », « Voiture va vers la gare : plus », sautant une étape et aboutissant indûment au résultat. Il commet ainsi une erreur de signes. Cette erreur consiste de nouveau à ramener les faits au point d'arrivée sur lequel l'attention est centrée.

Il s'agit donc toujours de la même erreur. Le comportement du sujet à ce stade rejoint celui des sujets du stade représentatif préopératoire travaillant sur des matières concrètes. Au stade représentatif préopératoire en effet, nous avons vu la naissance de l'opération concrète, tandis que nous assistons maintenant à la genèse de l'opération formelle. Nos sujets du début du stade formel ne sont pas encore capables de distinguer, puis de coordonner les deux points de vue opposés, mais réduisent l'un à l'autre. Ils ramènent, par exemple, l'orientation par rapport au second point de vue, à l'arrivée par rapport au premier point de vue. C'est le cas lorsque la voiture est orientée, comme dans l'exemple cité plus haut, vers le lieu opposé à la gare et que les élèves disent qu'elle va arriver vers la gare.

Ces résultats nous ont donc montré qu'il y a une différence ou un décalage entre la simple formulation et la formulation en termes mathématiques.

Citons Rignano ¹ qui dit à ce propos : « A ceux qui ne réussissent pas « à voir » derrière les symboles supérieurs l'ensemble des symboles inférieurs et, derrière les symboles inférieurs, l'ensemble des opérations réelles d'ordre général représenté par ces derniers, les mathématiques peuvent alors sembler, vraiment, s'être tout à fait émancipées de ces antiques opérations de calcul matérielles, d'abord effectivement exécutées et puis simplement pensées, d'où elles ont pris leur vol hardi. »

La conclusion que nous tirons des expériences faites à ce propos est la suivante : il faut que les signes algébriques soient compris pour que puisse être abordée une relation entre eux, telle justement leur multiplication.

Voyons maintenant deux expériences sur l'équivalence qui montrent de façon évidente qu'à 11 ans le développement intellectuel n'est pas achevé :

4. LA VOITURE, EXPÉRIENCE c') (AVEC JETONS, ÉQUIVALENCE)

Dispositif et technique

Le dispositif est le même que dans l'expérience c) (voir p. 76); la technique est semblable aussi en tout ce qui concerne le préambule ou la présentation de l'expérience à l'enfant, à cette différence près : après que la voiture a exécuté son troisième trajet, l'expérimentateur recouvre d'un papier la boîte des jetons utilisés. Ainsi, le sujet ne voit plus ces jetons.

Après le préambule, lorsque la technique est bien assimilée par le sujet, l'expérimentateur s'arrange à ce que la voiture s'arrête sur sa ligne de départ et pose la question suivante à l'enfant : « Tu te souviens que les jetons qui sont dans la boîte correspondent aux trajets que la voiture a effectués. Penses-tu qu'il y a plus de jetons rouges ou plus de jetons bleus dans la boîte ? »

Lorsque le sujet a donné sa réponse à cette question, l'expérimentateur lui propose de continuer le jeu. Après un certain nombre de trajets de la voiture, qui la ramèneront à son point de départ, l'expérimentateur posera la même question à l'enfant. Si la réponse que donne le sujet est juste, l'expérimentateur lui montre les jetons dans la boîte et on cesse le jeu. Si la réponse est fausse ou douteuse, l'expérimentateur ne montre pas le résultat au sujet, mais continue l'expérience jusqu'à trois et même quatre fois.

¹ RIGNANO, EUGENIO, *Psychologie du raisonnement*. Paris, Félix Alcan, 1920, p. 209.

Résultats

Nous avons examiné des enfants de 8 à 9 ans, de 12 à 13 ans et des adultes.

<i>Age</i>	<i>Réussites</i>	<i>Nombre de sujets</i>
8- 9	0	5
12-13	1	5
ad.	3	6
		16 Total

Les enfants de 8 à 9 ans pensent généralement que le nombre de l'une des couleurs est plus grand que celui de l'autre, c'est-à-dire qu'il y a dans la boîte davantage de jetons rouges ou davantage de jetons bleus, selon les cas. Ils persistent dans cette idée. La raison qu'ils donnent varie : ce peut être un simple désir de changement. Si par exemple ils ont dit une première fois que les rouges sont en majorité, ils pensent que la fois suivante ce seront les bleus. Il arrive aussi qu'ils adaptent leur réponse aux trajets que la voiture leur semble avoir effectués ; s'ils ont l'impression que la voiture a roulé surtout du côté du drapeau bleu, ils disent qu'il y a plus de jetons bleus dans la boîte.

Les enfants de 12 ans n'ont pas non plus la notion de cette équivalence. Ils l'acquièrent cependant au cours des répétitions de l'expérience : Après la première question, ils s'efforcent de calculer au fur et à mesure, essayant ainsi de trouver la solution en suivant les faits de près. Ils écoutent attentivement les dires de l'expérimentateur ou suivent les trajets de la voiture, additionnent ou soustraient mentalement les groupes de jetons et obtiennent ainsi le résultat en jetons rouges et bleus. Si l'expérimentateur veut avoir la certitude que la notion d'équivalence est acquise, il doit procéder plus rapidement, de façon que le sujet ne puisse plus le suivre et se perde dans ses calculs. La plupart du temps, pour cette catégorie d'âge, les sujets sont obligés d'avouer qu'ils ne savent pas s'il y a plus de jetons rouges ou bleus. Quelques sujets cependant, à l'aide de cette expérience plusieurs fois répétée, sont arrivés au sentiment que le nombre de jetons bleus et de jetons rouges doit être égal. Voici à cet égard la réponse d'un sujet de 12 ans : « Je pense qu'on a été des deux côtés un peu la même chose. »

Chez les adultes, on trouve davantage cette quasi-certitude qu'il doit y avoir le même nombre de jetons rouges et de jetons bleus. Mais ils ne peuvent généralement pas donner d'explication et si l'expérimentateur réitère sa question, ils perdent souvent un peu de leur certitude. Il leur arrive même de déclarer qu'il y a plus de jetons rouges ou plus de jetons bleus. Ils se mettent alors à calculer jusqu'au moment où l'expérimentateur procède trop rapidement pour qu'ils puissent le suivre.

Après quoi, ils ne sont guère plus avancés que les sujets de douze ans, c'est-à-dire qu'ils reconnaissent ne pas savoir s'il y a davantage de jetons rouges ou bleus. Si alors on leur montre le résultat, ils retrouvent leur croyance du début de l'expérience et sont enfin certains de l'équivalence. Ils nous donnent alors des explications que nous pouvons classer en trois catégories : les premières ne signifient pas grand-chose, disant que ce doit forcément être équivalent puisque l'on part et revient au même point, les secondes impliquant déjà une certaine compréhension de la loi d'équivalence et insistant sur le fait que l'on part et revient au même point, les troisièmes enfin donnant la démonstration par l'origine. Voici par exemple l'une de ces réponses : « La loi veut que, pour arriver au garage on ait toujours le même nombre de rouges et de bleus... il s'agit ici de soustraction ».

Cette expérience nous paraît intéressante, notamment par les observations qu'elle permet sur les sujets du stade formel, pour lesquels, nous l'avons dit, elle offre de sérieuses difficultés. Les sujets qui parviennent à s'exprimer à cet égard disent que la difficulté gît dans le fait que l'on a affaire à deux expériences simultanées. L'un de nos sujets voulait trouver une signification à chaque couleur et s'apercevait que cette signification ne pouvait pas être constante; il avait alors l'impression que deux systèmes étaient en jeu et s'entre-croisaient.

Voyons la seconde expérience sur l'équivalence :

5. LA VOITURE, EXPÉRIENCE *c''*) (AVEC JETONS, ÉQUIVALENCE, DEUX VOITURES)

Dispositif et technique

Il s'agit du même dispositif que dans l'expérience *c'* (voir p. 100).

La technique est modifiée sur les points suivants : On introduit deux voitures dans le jeu, chacune de ces voitures se comportant comme la voiture unique de l'expérience précédente. On fait avancer ou reculer, tantôt l'une, tantôt l'autre, entre-croisant leurs trajets, l'une avançant parfois moins ou plus que l'autre. En même temps que ces divers trajets sont exécutés par les voitures, l'expérimentateur met ou ôte les jetons correspondants dans la boîte. On arrête les voitures ailleurs que devant le garage mais toutes deux sur la même ligne. L'expérimentateur demande au sujet de lui dire où en sont les jetons dans les boîtes (chaque voiture a sa boîte de jetons), quelle est la boîte qui contient le plus de jetons, et combien elle en contient de plus.

Résultats

Nous n'avons interrogé que des adultes. Les uns répondent avec difficulté et n'arrivent pas à la solution, tandis que les autres se tirent

assez facilement de cette expérience¹. Ils parviennent à nous expliquer que les résultats sont numériquement identiques, c'est-à-dire que chaque boîte contient un nombre de jetons équivalent, sous réserve du nombre de jetons qu'il faut aux voitures pour regagner leur point de départ.

Revenons à des sujets du niveau scolaire et voyons la relation que ceux d'entre eux qui connaissent la règle des signes peuvent établir entre cette règle et l'expérience de la voiture.

6. LA VOITURE, EXPÉRIENCE c'') (AVEC JETONS, CORRESPONDANCE AVEC LA RÈGLE DES SIGNES)

Nous avons pris des sujets qui ont étudié la règle des signes en classe et nous leur avons demandé tout d'abord l'explication de la règle des signes. Aucun d'entre eux n'a su nous donner une réponse satisfaisante. (Nous reparlerons de ces résultats à propos de nos recherches sur la compréhension des mathématiques.) Il nous a paru intéressant de voir si de tels sujets établissent un rapport entre la règle des signes et notre expérience concrète. Nous les avons fait passer à l'expérience de la voiture aux jetons (voir p. 76). Nous leur avons présenté ce dispositif sans leur signaler ou leur suggérer qu'il s'agissait d'une matérialisation de cette règle. Nous verrons qu'elle est spontanément jugée par la plupart d'entre eux comme une représentation de la règle des signes qui les satisfait pleinement. Le fait d'être en possession d'une explication semble les soulager. Mais n'anticipons pas trop sur les résultats, passons plutôt à la description de cette expérience :

Dispositif

Une voiture, un garage, une bande de papier représentant une route, divisée en 8 étapes; un drapeau rouge; des jetons rouges et bleus, en unités, en paquets de deux et en paquets de quatre.

Le garage représente l'origine, sur un des côtés de la route, au centre du dispositif, soit à quatre étapes de chaque extrémité de la route. Le sujet et l'expérimentateur se placent d'un même côté de la route. A l'extrémité de la route, à leur droite, le drapeau rouge, à leur gauche, le drapeau bleu. La voiture est stationnée devant le garage, en direction du drapeau rouge.

Technique

La voiture peut faire marche avant et marche arrière; l'expérimentateur en fait la démonstration devant le sujet et lui permet d'en faire l'essai.

¹ Nous avons interrogé quatre sujets, deux d'entre eux ont réussi cette expérience.

A chaque étape que parcourt la voiture correspond un jeton ; ce jeton est rouge lorsque le chauffeur voit le drapeau rouge par le pare-brise. Chaque fois que le chauffeur de la voiture avance d'une étape, tout en voyant le drapeau rouge par le pare-brise on met un jeton dans la boîte.

On fait ensuite les exercices suivants :

L'expérimentateur met un paquet de deux jetons rouges dans la boîte en le faisant remarquer au sujet, c'est-à-dire en le lui disant. Il fait aussi avancer la voiture de deux étapes, toujours en le lui disant.

L'expérimentateur met encore un jeton rouge dans la boîte, en le disant. Il propose au sujet de faire avancer la voiture d'une étape, l'élève devant dire ce qu'il fait.

On reprend ces deux exemples, mais avec des jetons bleus cette fois ; ce qui signifie donc que par le pare-brise, le chauffeur voit le drapeau bleu. C'est toujours l'expérimentateur qui parle et agit avec les jetons, le sujet parle et agit avec la voiture, c'est donc lui qui doit la tourner.

On reprend ces deux exemples mais en faisant le contraire. L'expérimentateur joue avec la voiture et le sujet avec les jetons ; tous deux expriment toujours à haute voix ce qu'ils sont en train de faire.

Puis le sujet joue seul jusqu'à ce que cette partie de la technique soit bien comprise, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'il ait opéré cinq fois de suite sans se tromper, ni dans ses actes, ni dans ses paroles.

L'expérimentateur lui explique alors qu'enlever des jetons correspond à reculer la voiture : on ôte des jetons rouges lorsque le chauffeur voit le drapeau rouge par le pare-brise, etc. On fait les mêmes exercices que lorsqu'il s'agissait de mettre des jetons.

Les préambules terminés, l'expérience commence :

1. On place un drapeau blanc successivement à quatre points différents :

- 1) à deux étapes du garage, du côté du drapeau rouge ;
- 2) à deux étapes du garage, du côté du drapeau bleu ;
- 3) à quatre étapes du garage, du côté du drapeau rouge ;
- 4) à quatre étapes du garage, du côté du drapeau bleu.

Pour ces trajets, on peut employer des jetons unités pour chacun d'eux mais il est préférable d'employer des paquets (l'expérimentateur le suggère au sujet). Celui-ci peut ainsi employer des paquets de deux ou de quatre jetons pour les deux derniers trajets. Le sujet doit faire ces exercices seul, avec la voiture et avec les jetons, et en disant ce qu'il fait.

2. L'expérimentateur interroge le sujet sur l'équivalence. Il lui demande de tirer des conclusions de cette expérience. Il le met sur la piste en lui posant une question plus précise et en employant les mêmes termes que l'élève a employés, par exemple : « Vous nous parliez d'une

chose qu'on pouvait faire ou d'une autre; pourriez-vous en quelques mots nous redire de quoi il s'agissait ? » Le sujet a généralement de la peine à s'exprimer, aussi l'expérimentateur l'encourage-t-il en lui demandant de résumer sa pensée et de s'expliquer de la façon la plus simple possible.

3. Comme dans une leçon précédente tous nos sujets avaient déjà été interrogés par nous à propos de la règle des signes, ils arrivaient assez vite à la conviction que les questions que nous leur posions ou même le dispositif que nous employions étaient en rapport avec cette règle. Nos sujets imaginaient ainsi des parallèles entre la règle des signes et le dispositif de la voiture. Nous leur avons posé les questions suivantes :

Ces expériences vous font-elles penser à quelque chose ? Si oui à quoi ?

Si non, vous souvenez-vous de quoi nous avons parlé ensemble la dernière fois ? (quinze jours plus tôt).

Si le sujet ne se souvient plus ou ne dit rien, nous lui disons qu'il s'agit d'une représentation ou illustration de la règle des signes.

Que pensez-vous de cette représentation de la règle des signes ?

Comment la jugez-vous ? Vous satisfait-elle ?

Nous leur donnons alors la légende :

Rouge représente le positif, bleu représente le négatif; ajouter ou avancer représente le positif; enlever ou reculer représente le négatif.

Résultats

Nous donnons ici le résumé des résultats de cinq sujets de 14 ans et demi à 15 ans et demi. Les trois premiers étaient élèves du Collège de Genève et les deux derniers de l'école supérieure de jeunes filles de Genève.

Voici les réponses dans l'ordre où les questions ont été posées et pour les cinq sujets successivement :

Protocole des sujets examinés

I. GÉR., 14 ans 6 mois :

Question 1. Pour les trajets du garage au drapeau, l'expérimentateur a dû suggérer le fait qu'il y a une deuxième solution possible, ceci pour les deux premières positions du drapeau. Dans les quatre réponses, le sujet s'est contenté de traduire verbalement le jeu des jetons sans faire mention des trajets de la voiture.

Question 2. A la question sur l'équivalence, le sujet répond qu'il y a une quantité de solutions possibles. L'expérimentateur lui rappelle alors qu'il vient de dire : « On peut faire telle chose ou telle autre. » Le sujet se reprend alors et déclare : « On peut aller de deux manières vers un certain but. »

La réponse est correcte en termes de jetons, incomplète en termes de voiture : la marche de la voiture manque.

On demande au sujet de préciser puis d'exécuter. Il nous donne alors la marche de la voiture qu'il avait oubliée mais sans nous donner, cette fois, sa position. On continue, reprenant les quatre exemples du début de la technique. L'expérimentateur a beau encourager le sujet, celui-ci ne parvient pas à donner l'équivalence complète.

Question 3. Le sujet se souvient qu'il a été interrogé par nous sur « plus par plus et moins par moins » mais il n'y a pas pensé en jouant. L'expérimentateur lui donne alors la légende. Le sujet parvient à faire une ou deux traductions en signes, mais se trompe souvent et traduit mal en termes de voiture, quoique l'expérimentateur l'aide à plusieurs reprises.

Ce sujet ne parvient donc pas à des réponses claires. Même cet exemple concret est trop difficile pour lui. Si ce jeu n'était pas si nouveau, s'il l'avait déjà assimilé, sans doute aurait-il pris une signification pour lui.

II. LUC, 15 ans (zéro mois) :

Question 1. A la première demande, concernant les trajets de la voiture du garage au drapeau, ce sujet donne une réponse correcte. Il ne formule pas séparément les termes de la voiture et des jetons mais ensemble. Il donne les jetons correspondant au trajet qu'il fait effectuer à la voiture.

Aux trois dernières demandes il répond en donnant deux fois la voiture en premier et une fois les jetons. Il a fallu cependant que l'expérimentateur l'aide une fois pour les jetons et une fois pour la voiture.

Question 2. Quant à l'équivalence, le sujet nous donne immédiatement les deux couples de possibilités en termes de voiture. Puis lorsque l'expérimentateur le lui demande, en termes de jetons. Et le sujet passe spontanément à la question suivante :

Question 3. Il déclare tout à coup qu'« il pense en algèbre à une origine, au signe plus et moins » et il ajoute : « C'est ça oui, comme pour les math., l'origine c'est le garage : Si le chauffeur regarde le signal rouge, à droite c'est plus; la direction bleu c'est moins. C'est la même chose pour les mouvements de la voiture : si elle va en avant du côté bleu c'est moins, si elle va en arrière du côté rouge c'est plus. »

A la demande de l'expérimentateur, ce sujet traduit les différents trajets de la voiture en signes.

Lorsque l'expérimentateur lui demande ce qu'il pense de cette représentation de la règle des signes, le sujet répond qu'il la trouve bonne

parce que « visuelle ». Quant aux jetons, il trouve que ce n'est pas « pratique ». Il estime que pour le début il serait plus simple d'employer l'un ou l'autre : voiture ou jetons mais pas les deux à la fois. Il conclut en disant que, pour lui, maintenant, la règle des signes est claire. (Il s'agit d'un sujet qui lors du premier interrogatoire sur l'explication de la règle des signes n'était pas parvenu à représenter graphiquement une opération à droite de l'origine.)

III. J. P., 14 ans 7 mois :

Question 1. Toutes les réponses quant aux trajets de la voiture du garage au drapeau sont correctes en jetons; mais pour les deux premiers trajets il a fallu que ce soit l'expérimentateur qui lui demande de traduire en termes de voiture aussi.

Question 2. Ce sujet donne l'équivalence en jetons en la formulant ainsi : mettre ou ôter cela revient au même, mais de l'autre couleur. Il la donne aussi en termes de voiture mais seulement après un rappel de l'expérimentateur.

Question 3. Dès que l'expérimentateur demande au sujet s'il se souvient de ce qui a été vu lors du dernier interrogatoire, le sujet s'exclame : « J'ai très bien vu de quoi il s'agissait : le garage c'est l'origine, le rouge la direction plus, et le bleu la direction moins. Seulement on peut avancer en additionnant un certain nombre de points ou reculer en soustrayant; alors on ôte dans la boîte. Quand on additionne, c'est-à-dire quand on met des jetons bleus, donc on va vers le bleu; on peut soustraire des jetons bleus, ça fait... voyons... ça nous fait aller vers le rouge; donc on ajoute. »

Ainsi ce sujet a découvert toute la signification que nous avons attachée à cette expérience, à cela près qu'il n'emploie que les termes d'addition et de soustraction. Sur la demande de l'expérimentateur, il traduit facilement en signes les quatre formes de la règle. Il ne lui vient cependant pas à l'esprit de formuler l'équivalence en signes. L'expérimentateur doit la lui demander. Le sujet répond : « Plus plus égale plus ou moins moins égale plus, c'est le même résultat » et il ajoute encore : « Additionner quelque chose de positif ou soustraire quelque chose de négatif ou, dans l'autre sens : additionner quelque chose de négatif ou soustraire quelque chose de positif. »

Le sujet exprime son opinion quant à l'expérience; il estime qu'« elle est bonne pour prouver, parce que c'est quelque chose de pratique; elle est utile pour comprendre mais pas pour calculer. On pourrait s'en passer; on n'aurait que la règle des signes à apprendre par cœur. La dernière fois (c'est-à-dire lorsqu'il avait dû lui-même essayer de démontrer la règle), le moins par moins m'avait ennuyé. Ici il y a une bonne

traduction de la règle. Les jetons m'ennuient un peu. Ce serait mieux s'il n'y avait que la voiture; on comprendrait mieux, quoique les jetons aident à comprendre l'addition et la soustraction. En classe on avait expliqué la règle avec l'exemple des amis et des ennemis... ça ne prouve pas grand-chose : l'ennemi de mon ennemi n'est pas forcément mon ami... c'est assez faux ! » (Remarquons que l'expérimentateur a dû lui expliquer la multiplication.)

IV. LIL., 14 ans 9 mois :

Question 1. Cet élève nous donne une réponse correcte à la première question mais en jetons seulement; une réponse correcte à la seconde question, en jetons, puis en termes de voiture, sur la suggestion de l'expérimentateur. La 3^e réponse est correcte en jetons, puis en termes de voiture après suggestion. La 4^e réponse est immédiatement correcte en termes de jetons et de voiture.

Question 2. Nous devons mettre l'élève sur la voie de l'équivalence; le sujet déclare qu'on peut faire deux choses. La réponse est alors correcte en termes de voiture et de jetons.

Question 3. En jouant, l'élève n'a pas pensé à la règle des signes; il suggère pourtant que la couleur en face de la voiture soit plus et que la couleur derrière la voiture soit moins. L'élève a beaucoup de difficulté à traduire en signes; il y parvient tout de même, d'abord avec la voiture, puis en mêlant voiture et jetons et enfin pour les jetons seulement.

L'élève affirme mieux comprendre la règle des signes avec cet exemple et cite facilement l'équivalence : « Deux signes positifs ou deux signes négatifs, plus et moins et moins et plus et je trouve moins. »

L'expérimentateur lui demande ce qu'il ne comprenait pas dans la règle des signes; l'élève répond : « Surtout moins fois moins égale plus. »

L'élève se déclare parfaitement satisfait de cette explication.

V. SIM., 15 ans 7 mois :

Question 1. La première réponse est incomplète, puis correcte, après une suggestion de l'expérimentateur, mais en jetons seulement. La seconde réponse est immédiatement correcte, en jetons. La 3^e réponse, après une suggestion de l'expérimentateur concernant la voiture, est correcte en termes de jetons et de voiture. La 4^e réponse est immédiatement correcte quant aux jetons et à la voiture.

Question 2. La réponse sur l'équivalence est bonne.

Question 3. Le sujet se souvient que nous avons parlé de quantités positives et négatives et déclare à propos de l'expérience de la voiture :

« C'est en somme de l'algèbre, cela ! Quand on va vers le rouge, c'est positif, vers le bleu c'est négatif. Supposons que le bleu c'est moins : j'avance la voiture vers le bleu, c'est négatif, ça fait moins. Deux quantités moins qui s'ajoutent ça fait moins, comme une addition. »

Ce sujet n'a donc vu qu'un critère, la couleur. Il arrive à des conclusions fausses. L'expérimentateur lui fait alors remarquer que l'on peut aussi donner une signification à la marche de la voiture, etc. L'élève comprend rapidement et s'émerveille en constatant qu'il s'agit alors de la règle des signes.

Quant à la traduction des différents trajets représentant les quatre formes de la règle des signes, l'élève éprouve quelques difficultés, du fait certainement qu'il avait imaginé autre chose avec le même dispositif, soit une sorte d'addition. L'élève y parvient tout de même et déclare que : « C'est une bonne explication pour l'algèbre en tout cas », et que maintenant il a compris surtout pourquoi moins par moins donne plus. Quant à l'équivalence en signes, le sujet la donne dès qu'on la lui demande en disant : « Plus par plus ou moins par moins ; ou moins par plus ou plus par moins ; ça me paraît très clair. » (Lors de l'interrogatoire sur la règle des signes cet élève s'était toujours demandé la raison de cette règle.)

Compréhension de l'enfant

Concluons : Le rapport entre cette expérience et la règle des signes a été vu spontanément par plus de la moitié de nos sujets (trois sur cinq). Quatre de nos sujets ont l'impression d'avoir bien compris la règle des signes, en particulier la multiplication d'une quantité négative par une quantité négative.

Ces résultats nous permettent d'entrevoir dans quelle mesure une telle représentation de la règle des signes pourrait aider les élèves du niveau secondaire.

Résumé du stade formel :

Pour les élèves qui connaissent les éléments de l'algèbre, la représentation concrète de la règle des signes est une véritable révélation. Ils ont enfin l'impression de comprendre. Ce fait confirme la théorie opératoire qui veut que les opérations formelles s'appuient sur les opérations concrètes dont elles reçoivent le contenu.

Quant aux enfants du début du stade formel (de 11 à 13 ans) qui n'ont encore aucune notion d'algèbre, ils n'ont pas senti le problème que pose la règle des signes ; aussi cette manifestation concrète de la règle les intéresse-t-elle beaucoup moins. Il leur faudrait une explication que nous ne pouvons leur donner parce qu'elle nous entraînerait trop loin.

D'autre part, les recherches sur l'équivalence ont dérouté un bon nombre de nos sujets et ont prouvé qu'à 11 et 12 ans le développement intellectuel n'est pas encore achevé.

Ainsi, de ces trois groupes d'expériences que nous avons proposées au niveau formel, la première est la plus intéressante. Le résultat de ce groupe est de toute importance pour la didactique des mathématiques. Il donne à la règle des signes toute sa signification, sous forme de faits d'où cette règle peut être déduite.

CONCLUSION DE LA DEUXIÈME PARTIE

Les résultats des deux expériences que nous venons de décrire (voiture et balance) nous permettent de juger de la valeur des hypothèses que nous avons posées dans notre introduction :

1. Les faits ont vérifié la première d'entre elles, à savoir que la règle des signes est résolue de façon représentative préopératoire dès l'âge de 5 ans.

2. Les faits ont également vérifié la seconde hypothèse, à savoir que la règle des signes est résolue sur le plan concret dès l'âge de 7 ans.

3. La troisième hypothèse enfin, s'est révélée juste, dans la mesure où nous avons pu la vérifier par ces deux expériences. Elle demande cependant encore à être éprouvée sans matériel manipulable. Ces deux expériences se sont montrées d'excellents moyens pour la compréhension de la règle des signes au niveau secondaire. Elles ont montré, d'autre part, qu'ils se produit une évolution de la compréhension de l'équivalence au cours du stade formel.

Du point de vue pédagogique, la conclusion la plus importante est la suivante : malgré tous nos efforts pour rendre la règle des signes entièrement compréhensible aux jeunes enfants, nous n'y sommes pas parvenue avec des enfants de moins de 7 ans. Il nous faut donc bien constater que Piaget a raison lorsqu'il affirme que la réversibilité de la pensée n'est pas atteinte avant cet âge.

Les résultats de ces expériences nous ont amenée aux conclusions suivantes, lesquelles nous ont guidée dans le choix des expériences suivantes :

Ayant constaté par les résultats confirmant notre première hypothèse que la règle des signes ne pouvait être comprise dans son ensemble avant 7 ans, nous n'avions pas à pousser plus loin l'étude du comportement des sujets du stade représentatif préopératoire devant un dispositif faisant intervenir la règle des signes. Nous nous contentons donc de souligner qu'aucune des expériences concrètes que nous avons su imaginer n'a été résolue avant l'âge de sept ans.

Il est intéressant au contraire, à propos de la vérification de la seconde de nos hypothèses, de décrire un certain nombre d'expériences concrètes qui sont résolues au cours de ce stade. Nous insistons dès

maintenant sur la valeur de ces expériences qui constituent une excellente propédeutique concrète. Notre Troisième partie est uniquement consacrée à de telles expériences.

Notre troisième hypothèse n'ayant été que partiellement vérifiée, nous avons été conduite à poursuivre une série de recherches sur les plans logique et mathématique. Nous verrons, par les résultats de ces recherches, qu'il n'y a pas lieu d'attribuer une grande valeur, du point de vue pédagogique, à ce genre de représentation de la règle des signes : les élèves n'en sont guère satisfaits. L'exposé de ces expériences au stade formel constituera la Quatrième Partie de notre travail.

TROISIÈME PARTIE

Opérations concrètes

Nous avons vu que Piaget appelle opérations des actions réversibles qui n'apparaissent qu'au stade concret. Elles sont réversibles parce qu'elles peuvent se dérouler dans les deux sens, telles l'addition et la soustraction. Enfin, elles se coordonnent toujours en systèmes d'ensemble, et c'est la cohérence de ces systèmes qui constitue la logique des opérations.

Piaget a fait un grand nombre d'expériences sur la logique concrète. Il a montré que dès l'âge de 7 ou 8 ans, l'enfant est capable, sur le plan concret, d'opérations réversibles. Ces expériences constituent d'excellentes indications pour la compréhension de la règle des signes puisque, comme nous l'avons dit, cette règle est inséparable de la notion de réversibilité. Nous citons ici les plus caractéristiques :

I. EXPÉRIENCES QUALITATIVES

1. OPÉRATIONS DE CLASSIFICATION

Il s'agit d'une opération qualitative : intégrer des parties dans un tout. Réunir des objets dans une classe A, puis dans une classe A', faisant partie toutes deux d'un ensemble B. Puis retrancher de cet ensemble B la classe A', de façon à retrouver la classe A.

Piaget a étudié ces opérations élémentaires de la logique notamment au moyen du matériel suivant ¹ : Une boîte ne contenant que des « perles en bois » (classe B), dont la plupart sont brunes (classe A), et dont deux sont blanches (classe A'). Il demande au sujet si, dans cette boîte, il y a davantage de perles en bois (classe B) que de perles brunes (classe A).

¹ PIAGET, JEAN, *Psychologie de l'intelligence*. Paris, Armand Colin, 1947, p. 17.

PIAGET, JEAN, *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1941, p. 158-228.

Jusqu'à 7 ans, ce problème s'est révélé d'une grande difficulté. Piaget en a varié les données et l'a posé en termes encore plus intuitifs, en se servant d'un collier, par exemple. Les résultats convergents des différents types d'interrogatoire montrent qu'à cet âge, quand les enfants raisonnent sur le tout, ils ne le font pas sur la partie, et vice versa. Concevoir les parties en fonction du tout, et réciproquement, c'est composer simultanément les deux égalités $A + A' = B$ et $A = B - A'$: c'est donc précisément effectuer l'opération inverse aussi bien que l'opération directe. Penser de manière irréversible, c'est au contraire ne pas savoir manier les opérations comme telles : c'est remplacer un mécanisme opératoire mobile et à double direction par des perceptions statiques et successives d'états.

Au contraire, les enfants, à partir de 7 ans, parviennent sans difficulté à cette réversibilité psychologique et à cette composition logique des opérations inverses avec les opérations directes.

2. OPÉRATIONS DE SÉRIATION

Piaget a employé un matériel analogue au matériel Montessori. Il donne à l'enfant ¹ une collection de dix petits bâtons de différentes longueurs en demandant de la sérier du plus petit (A) au plus grand (K). Les objets sont peu différents : 10 cm, 11 cm, etc., si bien que la perception d'ensemble ne suffit pas et qu'il faut toujours comparer les objets. Les petits enfants font cette comparaison par couples : et construisent empiriquement un escalier. Vers 7 ou 8 ans, l'enfant arrive à une méthode rigoureuse : il cherche le plus petit de tous les bâtons, puis le plus petit de tous ceux qui restent, etc.

Cette méthode suppose de nouveau un élément de réversibilité : $C B$ et A et en même temps $C D E F$ (tous ceux qui restent). C'est l'union de ces deux relations, donc une opération réversible, qui permet la solution du problème.

3. OPÉRATIONS DE CONSERVATION

Voici l'une des expériences de Piaget ². En premier lieu on présente au sujet deux récipients cylindriques de mêmes dimensions ($A 1$ et $A 2$) contenant la même quantité de perles (l'égalité des quantités étant reconnaissable à celle des niveaux). On verse alors le contenu de $A 2$

¹ PIAGET, JEAN, *Psychologie de l'intelligence*. Paris, Armand Colin, 1947, p. 171.

PIAGET, JEAN, *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, p. 155-167.

² PIAGET, JEAN, et SZEMINSKA, ALINA, *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1941, p. 7-48.

dans deux récipients plus petits et semblables l'un à l'autre ($B\ 1$ et $B\ 2$), et l'on demande à l'enfant si la quantité transvasée de $A\ 2$ en $B\ 1 + B\ 2$ est restée égale à celle de $A\ 1$. La configuration perceptive ayant changé, l'enfant en dessous de 7 ans nie la conservation; il pense que le nombre des perles a changé. Il considère comme naturel que la quantité de perles varie selon la forme et les dimensions des récipients dans lesquels on les transvase. La perception des changements apparents n'est donc nullement corrigée par un système de relations ou d'opérations assurant l'existence d'un invariant de quantité. A partir de l'âge de 7 ans, au moment où l'enfant devient apte aux opérations réversibles, il postule d'emblée la conservation des quantités dans chacune des transformations que l'on effectue devant lui. Ainsi, grâce à la réversibilité de sa pensée, il dit que c'est la même chose parce qu'on n'a qu'à remettre les perles dans le premier bocal. Nous voyons ainsi que l'aptitude à la réversibilité est nécessaire à la notion de conservation. Or, l'invariance d'une totalité est une condition sine qua non pour faire de l'enseignement mathématique.

Piaget a relaté encore toute une série d'expériences semblables dans son volume intitulé *La genèse du nombre*¹, volume qui aboutit tout entier à prouver qu'une opération est bien une action réversible.

Logique concrète

Comment l'enfant parvient-il à cette logique, tel est le problème fondamental que Piaget s'est posé. Comme l'ont montré ses expériences, ce n'est pas par un simple perfectionnement des méthodes intuitives ou perceptives, car la perception est rigide et irréversible. Pour parvenir à coordonner la mobilité des transformations réversibles, il s'agit au contraire de briser les structures perceptives et de construire un système d'opérations.

Dans chacune des expériences de Piaget que nous avons mentionnées, nous pouvons observer la constitution simultanée et la coordination des cinq mécanismes caractéristiques des groupements décrits dans notre introduction, à savoir : l'opération directe, inverse, identique, associative et tautologique. L'opération que nous avons mise en évidence est l'opération inverse, parce qu'elle concerne plus étroitement notre sujet. Cette opération fait correspondre à chaque action une action inverse : séparer pour réunir, déplacer pour placer (ou replacer pour déplacer, l'inverse de l'inverse redevenant l'opération directe), parcourir une série dans un sens puis dans l'autre, etc. Tout ce que nous avons vu des débuts de la réversibilité nous a montré qu'elle constitue la condition de forma-

¹ PIAGET, JEAN, et SZEMINSKA, ALINA, *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1941.

Voir également : PIAGET, JEAN, et INHELDER, BÄRBEL, *Le développement des quantités chez l'enfant*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé 1941.

tion des systèmes opératoires, de même que la réversibilité ne se constitue de façon stable (et dépasse le niveau du retour empirique au point de départ) qu'en s'appuyant sur l'ensemble des opérations : c'est donc dire, en un mot, que l'opération directe s'appuie nécessairement sur l'inverse et réciproquement. Dans l'opération de conservation, par exemple, si l'on verse A en B plus mince et allongé, l'enfant saura tenir compte des proportions inverses et égaliser les différences observées.

Selon Piaget, le fond commun des opérations en général n'est autre, en effet, que l'action elle-même sous sa forme la plus concrète et la plus sensori-motrice. Une opération, nous l'avons vu, c'est une action devenue réversible. Une action quelconque n'est pas une opération, parce qu'elle ne conduit qu'à des résultats quelconques et n'y conduit qu'empiriquement. Le réglage de la construction commence, et avec lui le caractère opératoire de l'action, lorsque les actions se groupent en un système fermé, associatif et réversible.

Toute l'histoire du groupement est celle d'une décentration progressive de l'action propre, c'est-à-dire d'une élimination de l'égoïsme au profit de la composition fermée et réglée, par le fait que les actions initiales deviennent réversibles et opératoires ou, si l'on préfère, par le fait que les actions du moi s'insèrent dans la totalité des actions possibles.

NOS EXPÉRIENCES SUR LA RÈGLE DES SIGNES

Cette partie même de la règle des signes, qui sous sa forme abstraite est la plus difficile à saisir pour un enfant de 14 ans (faire deux fois l'opération inverse ramène à l'opération directe) devient quelque chose de très simple sous l'angle des opérations concrètes pour un enfant beaucoup plus jeune. Nous avons proposé différentes sortes d'expériences aux enfants. Certaines de ces expériences ne représentent qu'une espèce de signes (soit les signes propres, soit les signes opératoires) et ne font intervenir que des signes négatifs; d'autres font appel à des signes positifs et négatifs tout en ne représentant toujours qu'une espèce de signes (soit les signes propres, soit les signes opératoires). Un autre groupe d'expériences encore représente aussi bien les signes propres et opératoires que les signes positifs et négatifs. Certaines de ces expériences enfin font intervenir soit de petites additions, soit de petites multiplications numériques.

GROUPE A : EXPÉRIENCES NE FAISANT INTERVENIR QU'UNE SORTE DE MOUVEMENT POUR LES SIGNES MOINS

Voyons tout d'abord le premier groupe d'expériences, lequel, comme nous venons de le voir, ne fait intervenir qu'une espèce de signes, soit les signes propres, soit les signes opératoires. Ces deux espèces de signes

se comportent pratiquement de la même manière, si bien qu'ils sont parfaitement interchangeables. Nous n'avons donc donné qu'une seule et même signification au signe moins, soit, par exemple, une rotation dans l'expérience des perles ou une courroie croisée dans l'expérience des poulies.

a) *Sans signes* +

Nous avons laissé de côté la représentation des signes positifs. Témoin l'expérience des poulies dans laquelle nous avons croisé toutes les courroies, au lieu de laisser la double possibilité : courroies croisées ou directes.

Ces expériences se concentrent ainsi sur l'étude du signe moins, dont la signification est l'inversion, qu'il s'agisse d'inversions de sens ou de position. Parfois le dispositif entier subit une rotation, son centre fonctionnant comme charnière; dans ce cas, chacun des objets qui se trouve à l'extrémité du dispositif change de place avec l'autre, et l'ordre se trouve ainsi inversé à chaque rotation (voir l'expérience des perles, p. 119). Parfois, aussi, le dispositif est composé de pièces pouvant tourner dans un sens ou dans le sens opposé, selon une succession régulière; la première tourne dans un sens, la seconde dans le sens opposé et la troisième de nouveau dans le sens de la première (expérience de l'engrenage et des poulies, p. 120-121). Ainsi, lorsque l'expérimentateur intervient pour ajouter une poulie ou une roue dentée, ou pour imprimer une rotation au dispositif, il change le sens ou l'ordre qui avait été donné soit par les poulies ou les roues dentées, soit par les rotations précédentes. Chaque fois qu'il intervient dans le jeu, l'expérimentateur inverse l'ordre ou la position. Or, on sait que dans la règle des signes, chaque fois qu'un signe négatif supplémentaire est introduit, il change le signe précédemment obtenu, que celui-ci soit négatif ou qu'il soit positif. Un signe positif supplémentaire, en revanche, ne change rien à l'ordre ou au sens précédent.

La règle des signes, telle que la présentent les expériences suivantes correspond à un nombre plus ou moins grand d'inversions : une rotation ou un renversement de la marche changent chaque fois l'ordre ou le sens. Les techniques ainsi utilisées font intervenir une, deux, trois inversions ou même davantage. Une rotation de 180° inverse l'ordre de départ, deux rotations de 180° ou deux renversements du mécanisme de marche ramènent l'ordre ou le sens de départ. Trois rotations de 180° ou trois renversements de la marche donnent l'ordre ou le sens inverses du départ; quatre rotations de 180° ou quatre renversements de marche redonnent l'ordre ou le sens de départ, etc.

Dans nos expériences, il s'agit toujours de deux sens ou de deux positions opposées; de même la règle des signes comporte deux signes opposés : l'un positif, l'autre négatif. Le résultat ne peut donc osciller

qu'entre deux possibilités : le départ est effectué dans un certain sens, la poulie ou la roue dentée suivante imprime le sens opposé. Le sens imprimé par la prochaine poulie ou roue dentée sera de nouveau le même que le sens de départ, etc. Il en va de même avec les perles : la position de départ peut être, par exemple, rouge ou bleue ; une rotation et la perle bleue vient prendre la place de la perle rouge. Une seconde rotation, et l'ordre de départ est retrouvé. Ainsi, étant donné qu'il n'y a que deux pôles, changer deux fois de sens ou de position revient à reprendre le sens de départ ou la position initiale des objets. En algèbre aussi, on considère que chaque couple de signes négatifs n'équivaut à aucun changement de signe — c'est-à-dire qu'un couple de signes négatifs joue le rôle d'un signe positif. Voici donc le parallèle entre nos recherches et la règle des signes :

Une action de l'expérimentateur correspond à un signe moins —.

Deux actions de l'expérimentateur correspondent à deux signes moins —.

Trois actions de l'expérimentateur correspondent à trois signes moins —.

Cinq poulies ajoutées par exemple, et l'ordre de départ est inversé, comme le serait le résultat de cinq signes négatifs. Les nombres impairs de poulies ajoutées inversent l'ordre de départ, tandis que les nombres pairs de poulies conservent cet ordre de départ. Là encore, la correspondance avec la règle des signes est évidente ; un nombre pair de signes négatifs donne un résultat positif, tandis qu'un nombre impair de signes négatifs donne un résultat négatif.

Plutôt qu'à la règle des signes proprement dite, toutes ces expériences correspondent à la loi algébrique suivante : un nombre pair de signes négatifs donne un résultat positif ; un nombre impair de signes négatifs donne un résultat négatif. Remarquons que cette loi est une sorte de prolongement de la règle des signes elle-même, en effet :

« plus », « plus » donne « plus »

« moins », « moins » donne « plus »

donc aucun signe négatif ou deux signes négatifs, autrement dit, un nombre pair de signes négatifs, donne un résultat positif :

« plus », « moins » donne « moins »

« moins », « plus » donne « moins »

donc un signe négatif ou un nombre impair de signes négatifs, donne un résultat négatif.

Cette loi représentée concrètement se ramène à un rythme ; aussi avons-nous imaginé une contre-épreuve (expérience des perles dans un tube, p. 135) qui a mis en évidence le fait que le rythme est une chose naturelle à l'enfant du stade représentatif préopératoire déjà et qui est donc parfaitement acquise au stade concret, moment auquel toutes nos expériences sont résolues (7 ans). Ces recherches, en effet,

ne faisant intervenir que deux possibilités, seule est possible l'alternative : positif, négatif, positif, négatif, etc.

Nous nous sommes ainsi demandé si l'enfant ne résolvait pas ces problèmes grâce à son sens de l'alternance, plutôt que grâce à sa compréhension du problème.

Dans les conclusions de sa *Psychologie de l'intelligence*¹, Piaget traite la question du rythme à laquelle se rattache celle de l'alternance. Il montre que le processus que suppose le rythme annonce déjà ce que deviendra la réversibilité propre aux opérations. En effet, un mouvement dans les deux sens, s'il est répété, engendre en quelque sorte un rythme; nous le verrons aussi à propos des enfants qui suivent nos expériences du geste ou des yeux, et qui se complaisent à un mouvement alterné de gauche à droite et de droite à gauche.

L'expérience des perles dans un tube a montré qu'au stade représentatif préopératoire, à 5 ans en particulier, le sens du rythme est d'un grand secours aux enfants.

Au stade concret, moment auquel les trois expériences de ce groupe sont résolues, à savoir celle des perles, celle de l'engrenage et celle des poulies, nous avons plus que du rythme. Il s'agit déjà d'opérations concrètes réversibles. Dès l'âge de 7 ans en effet, l'enfant, après deux rotations de 180° du dispositif des perles, s'exprime ainsi : « ça revient au même » (qu'au point de départ). Il a donc déjà le sens de l'aller et du retour. Quel que soit le dispositif qui illustre cette règle, elle se trouve résolue dès l'âge de 7 ans.

Passons à l'exposé de ce groupe d'expériences.

1. Les perles

Dispositif et technique. Nous avons adopté un dispositif et une technique identiques à ceux de Piaget² : Trois perles de couleurs différentes : rouge, jaune, bleue, sont enfilées le long d'un fil de fer. Le tout est caché dans une housse après avoir été montré au sujet. Supposons qu'au début de l'expérience le sujet sache que la perle rouge se trouve devant lui. Il suffit d'une rotation du dispositif pour que ce soit la perle bleue qui vienne prendre cette place. Une seconde rotation ramène l'ordre de départ, c'est-à-dire que la perle rouge se trouve de nouveau devant le sujet. Une troisième rotation au contraire inverse l'ordre précédent, c'est-à-dire l'ordre de départ : la perle bleue se trouve alors de nouveau devant le sujet³.

¹ PIAGET, JEAN, *La psychologie de l'intelligence*. Paris, Armand Colin, 1947, p. 202.

² PIAGET, JEAN, *Psychologie de l'intelligence*, p. 161-162; Mouvement et vitesse, p. 1-32; Introduction à l'Epistémologie génétique, tome I, p. 341-342.

³ L'expérience de Piaget a pour but d'étudier l'évolution de la notion d'ordre; elle sert d'introduction à l'analyse des déplacements.

Résultats. A partir de l'âge de 7 ans, l'enfant sait prévoir la couleur de la perle qui doit se trouver devant lui, après que l'expérimentateur a fait exécuter quelques rotations au dispositif.

Age	Réussites	Nombre de sujets
5-6	0	5
6-7	1	5
7-8	4	5
		15 Total

2. L'engrenage

Dispositif. Une planchette sur laquelle on a fixé un engrenage comprenant six roues dentées. Sur la première de ces roues, une petite manivelle permettant de mettre les roues dentées en mouvement. Ces roues sont fixées de telle façon que le sujet puisse facilement les ôter et les remettre.

Technique. Au début de l'expérience toutes les roues dentées sont ôtées, puis l'expérimentateur les place, une à une, en faisant deviner à l'enfant, au fur et à mesure qu'il les fixe, le sens dans lequel la dernière roue tournera. Le sujet doit ainsi décrire ce qui va se passer avec une roue, avec deux roues, etc. La succession est régulière : une roue tourne dans un sens, la suivante dans le sens opposé, la troisième dans le sens de la première, etc.

Chaque roue apporte donc une inversion de sens. Une première roue ajoutée modifie le sens de départ en l'inversant, une seconde ramène le sens de départ, une troisième enfin imprime à la suivante un sens contraire au sens de départ, en changeant pour la troisième fois le sens de rotation.

Résultats. Le problème est résolu vers 7 ans, les enfants prévoyant alors le sens dans lequel doit tourner la dernière roue dentée. Les résultats

Age	Réussites	Nombre de sujets
6-7	0	7
7-8	8	10
		17 Total

de cette expérience sont semblables à ceux que donne l'expérience des perles (p. 119). Nous avons soumis quelques sujets successivement à ces deux expériences, soit en commençant par les perles, soit en commençant par l'engrenage; les résultats ont montré que s'ils résolvent l'une de ces expériences, ils savent aussi résoudre l'autre.

3. Les poulies

Dispositif et technique. Une planchette sur laquelle on a fixé six poulies et des courroies pour relier ces poulies les unes aux autres. Les poulies sont mobiles, comme les roues dentées dans le dispositif de l'engrenage. Au début de l'expérience toutes les poulies sont enlevées. L'expérimentateur les pose une à une, en demandant au fur et à mesure au sujet de deviner le sens dans lequel la dernière poulie tournera. Il croise les courroies, de telle sorte que chaque fois qu'il ajoute une poulie, le sens de la rotation est inversé.

Chaque lien fait ainsi intervenir une inversion, alors que dans le dispositif tel qu'il avait été conçu par son constructeur (Van Cauwenberghe), le lien non croisé conserve le sens de rotation tandis que le lien croisé l'inverse. Nous apportons ainsi une simplification à l'expérience et la rendons très semblable à celle de l'engrenage. La seule différence est la suivante : dans le dispositif de l'engrenage, ce sont les roues dentées qui inversent chaque fois le sens, tandis que dans le dispositif des poulies, ce ne sont pas les poulies elles-mêmes qui produisent cet effet, mais les courroies qui relient ces poulies les unes aux autres.

Résultats. Le dispositif des poulies nous semblait être un peu plus complexe que celui de l'engrenage puisqu'il fait intervenir un élément supplémentaire : les courroies. Or, les résultats de nos expériences ont

Age	Réussites	Nombre de sujets
6-7	1	10
7-8	7	9
		19 Total

montré que les difficultés des deux dispositifs sont équivalentes, puisque les deux expériences sont résolues au même âge, c'est-à-dire vers 7 ans ¹.

b) Avec signe +

Remarquons que dans les trois expériences précédentes (groupe a) les actions sont exécutées par l'expérimentateur, le sujet observant ce qui se passe, sans intervenir directement dans les mouvements du jeu. D'autre part, il pouvait assez facilement s'appuyer, pour résoudre la difficulté, sur le sens de l'alternance ou du rythme.

¹ Les dispositifs de l'engrenage et des poulies ont été construits en collaboration avec MM. Van Cauwenberghe et Chaponnière, et les recherches sur les perles, l'engrenage et les poulies ont été effectuées sous notre contrôle par M^{lle} Grütter et MM. Van Cauwenberghe et Chaponnière, alors que nous exerçons les fonctions d'assistante.

Nous avons donc cherché à employer des expériences qui ne permettent pas au sujet (ou en tout cas dans une beaucoup plus faible mesure) de faire appel au rythme, et qui, d'autre part, fassent intervenir les mouvements propres du sujet comme élément même du jeu. Dans l'esprit de l'observateur, ces mouvements seront l'expression du signe plus. Ainsi, les facteurs positifs sont intégrés à l'expérience qui va pouvoir être une illustration plus complète de la règle des signes sous ses quatre formes : « plus et plus », « moins et moins », « plus et moins », « moins et plus ».

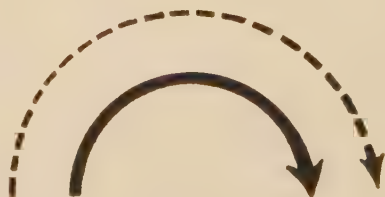
Ce deuxième groupe d'expériences ne fait toujours appel qu'à une espèce de signes moins, soit les signes propres, soit les signes opératoires. Il s'agit en effet d'une seule sorte d'inversion, causée par un mouvement rotatif. Passons à la description de ce groupe d'expériences.

1. Les perles (avec mouvement du sujet)

Dispositif. C'est le même que celui de l'expérience de Piaget : un tube de carton dans lequel nous avons introduit une aiguille à tricoter le long de laquelle sont placées trois perles de couleurs différentes : rouge, jaune, bleue. Tout chevauchement est impossible, le tube étant adapté à la grandeur des perles. On place le dispositif sur le centre d'une table, le sens de la longueur du dispositif dans le sens de la longueur de la table. De chaque côté de la table, au milieu de la longueur : une chaise. Le sujet devra s'asseoir tantôt sur l'une, tantôt sur l'autre, et pour ce faire, il faudra qu'il fasse le tour de la table. L'expérimentateur se charge des rotations du dispositif. Les mouvements de l'enfant et les rotations du dispositif sont toujours simultanés. L'expérimentateur fait exécuter les rotations au dispositif pendant que le sujet marche autour de la table et observe les actions de l'expérimentateur, sur l'ordre de ce dernier.

Technique. L'expérimentateur fait exécuter les mouvements suivants à l'enfant et au dispositif : Sur les croquis, les mouvements ne causant pas d'inversions (mouvements de l'enfant) sont indiqués en traits pointillés et les rotations du dispositif en traits pleins.

1. $\frac{1}{2}$ tour enfant;
 $\frac{1}{2}$ rotation dispositif.



Ces deux mouvements sont exécutés dans le même sens.

Au total : deux mouvements, une inversion, ordre indirect ¹.

Après chaque exercice, nous demandons à l'enfant quelle sera la couleur de la perle, à l'extrémité du tube que nous lui désignons (il s'agit toujours de l'extrémité du tube qui est située du côté de la porte de la salle d'expérience).

2. L'enfant revient à son point de départ et les perles sont ramenées dans leur première position. L'expérience 1) est répétée, soit :

- $\frac{1}{2}$ tour enfant;
- $\frac{1}{2}$ rotation dispositif.



Ces deux mouvements sont exécutés dans le même sens.

Au total : deux mouvements, une inversion, ordre indirect.

3. L'enfant ne bouge pas, mais les perles sont ramenées à leur position de départ. L'expérience comprend :

- $\frac{1}{2}$ tour enfant;
- $\frac{1}{2}$ rotation dispositif.



Ces deux mouvements sont exécutés dans le même sens.

Au total : deux mouvements, une inversion, ordre indirect.

Il s'agit toujours de la même expérience, sauf que la rotation du dispositif se fait en même temps que le sujet revient à sa position de départ.

4. L'enfant ne bouge pas, mais les perles sont ramenées à leur position de départ. L'expérience comprend :

- $\frac{1}{2}$ tour enfant;
- deux $\frac{1}{2}$ rotations dispositif.



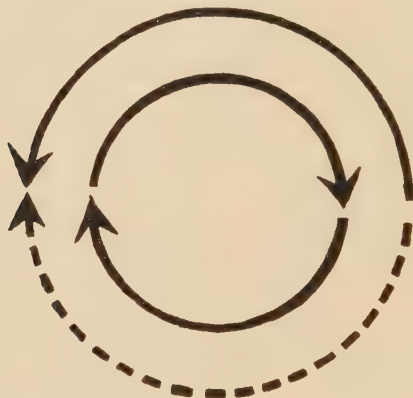
Ces mouvements sont exécutés dans le même sens.

Au total : trois mouvements, deux inversions, ordre direct.

¹ Il s'agit de l'ordre dans lequel se trouvent les perles; nous appelons ordre direct, l'ordre de départ, soit rouge, jaune, bleu, et ordre indirect, l'ordre inverse, soit bleu, jaune, rouge.

5. L'enfant ni les perles ne sont ramenés à leur position de départ.
L'expérience comprend :

$\frac{1}{2}$ tour enfant;
trois $\frac{1}{2}$ rotations dispositif.



Ces mouvements sont exécutés dans des sens différents.
Au total : quatre mouvements, trois inversions, ordre indirect.

Les rotations du dispositif sont donc les suivantes :



Nous avons remarqué qu'avec cette technique, le mouvement de l'enfant n'apporte aucune inversion au dispositif. Si nous avions placé l'enfant dans le sens de la largeur de la table, chacun de ses demi-tours autour de la table aurait changé l'ordre des perles par rapport à lui-même, c'est-à-dire qu'il y aurait eu inversion des perles du point de vue de leur plus ou moins grande proximité de l'enfant. Comme nous avons placé le sujet dans le sens de la longueur de la table, il n'y a inversion des perles que par rapport à la gauche et à la droite du sujet, point de vue auquel l'enfant ne se place pas. Nous verrons en effet que l'enfant prend plutôt un point de repère extérieur à lui-même.

Des deux mouvements superposés que nous avons fait intervenir dans cette recherche, un seul donc inverse l'ordre des perles dans le tube. Aussi, cette expérience reste-t-elle encore assez proche de celle que nous venons de décrire dans le groupe *a*) (les perles, l'engrenage ou les poulies).

Résultats. Grâce à la facilité avec laquelle l'enfant adopte un point de repère extérieur à lui-même, la fenêtre par exemple, cette nouvelle technique a donné les mêmes résultats que l'expérience des perles décrites dans le groupe a) (p. 119). A 7 ans le problème est résolu; le sujet décèle la position dans laquelle les perles se trouvent. Les sujets dissocient très bien, en effet, la rotation du dispositif et le mouvement de leur propre corps. Ces deux mouvements n'ont pas la même conséquence pour eux : l'un change l'ordre des perles, tandis que l'autre ne joue aucun rôle à ce point de vue.

Age	Réussites	Nombre de sujets
6-7	2	10
7-8	9	10
		20 Total

La seconde expérience fait intervenir la règle des signes telle qu'on a l'habitude de la mémoriser, sous les quatre formes : plus et plus égale moins, moins et moins égale plus, plus et moins égale moins, moins et plus égale moins.

2. Les chiens

Dispositif. Deux petits chiens, un noir et un blanc, chacun d'entre eux est placé sur un morceau de fer aimanté. Chaque morceau de fer a donc un pôle positif et un pôle négatif : les deux pôles d'espèce différente s'attirent, tandis que les deux pôles de même espèce se repoussent.

Nous avons collé sur les aimants la figure des petits chiens de telle façon que lorsque les pôles s'attirent, les deux petits chiens se tournent le dos ou se regardent. Lorsque les pôles se repoussent, un petit chien tourne le dos à l'autre qui le regarde; il semble donc, dans cette position, que les chiens sont en train de marcher à la file indienne. La correspondance avec la règle des signes peut s'établir de la façon suivante : Si les chiens se rencontrent dos à dos ou face à face, il s'agit de deux mêmes termes : le résultat peut être considéré comme positif. Si les chiens se repoussent dos et tête ou tête et dos, il s'agit de deux termes différents : le résultat peut être considéré comme négatif. Ce qui donne la légende suivante :

En ce qui concerne les signes eux-mêmes :

- + = côté de la tête du chien
- = côté de la queue du chien

En ce qui concerne les signes des résultats :

- + = lorsque les chiens s'attirent
- = lorsque les chiens se repoussent

En ce qui concerne les quatre formes de la règle des signes :

- 1) $+. + = +$ les deux chiens se regardent, les aimants s'attirent;
- 2) $-. - = +$ les chiens se tournent le dos, les aimants s'attirent;
- 3) $+. - = -$ les chiens se suivent, les aimants se repoussent;
- 4) $-. + = -$ les chiens se suivent, les aimants se repoussent.

On place toujours les chiens dans une route (rainure), dont la largeur est égale à celle de la base aimantée des petits chiens, de telle sorte que les enfants ne puissent pas s'amuser à faire courir les chiens dans tous les sens, mais qu'ils se concentrent sur la recherche des quatre formes de la règle des signes qui nous intéressent. C'est, d'autre part, le seul moyen dont nous disposons pour faire en sorte que les pôles des aimants se repoussent.

Ce dispositif a le grand avantage de parler à l'imagination des petits, de leur être très tôt compréhensible. La plupart des enfants connaissent le jeu.

Technique. Nous laissons tout d'abord les enfants libres de manipuler les petits chiens comme ils veulent. Ainsi la différence entre les enfants connaissant déjà le jeu et ceux qui ne le connaissent pas encore s'atténue.

Nous leur posons les questions suivantes :

1. Qu'est-ce qui se passe si les petits chiens sont placés ainsi ? et ainsi ? etc. Nous mettons l'enfant devant les quatre combinaisons possibles, successivement, en lui demandant au fur et à mesure de prévoir la solution.

2. Comment faut-il que les petits chiens soient placés pour qu'ils s'attirent, et pour qu'ils se repoussent ? Nous voyons ainsi si l'enfant peut réaliser les deux combinaisons qui conduisent, les unes à un résultat positif, les autres à un résultat négatif.

3. L'expérimentateur ne regarde pas ce qui se passe, ce qui oblige le sujet à décrire verbalement les quatre formes de la règle des signes, puis les diverses combinaisons possibles pour un résultat positif et pour un résultat négatif. Nous pouvons ainsi voir si l'enfant est capable de formuler, s'il peut décrire facilement ce qui se passe sous ses yeux.

Résultats. A partir de 7 ans ¹, la question 1), concernant les quatre formes de la règle des signes, est résolue. De même, à partir de 7 ans, la seconde question est résolue, c'est-à-dire que l'enfant sait grouper les combinaisons deux par deux, selon leurs résultats. Quant à la formulation de la règle, l'enfant y parvient à 8 ans.

¹ Signalons que cette expérience des chiens a été faite avec la collaboration de M^{lle} Schneider.

Age	Question 1	Réussites		Nombre de sujets
		Question 2	Question 3	
5- 6	0	0	0	7
6- 7	2	3	0	7
7- 8	6	7	2	7
8- 9	3	3	3	4
9-10	4	4	3	4
				29 Total

Protocole de l'un des sujets interrogés

Voici le protocole d'un enfant de 7 ans :

FRA., 7 ans, 2 mois ¹ :

1. Si je place les deux petits chiens ainsi (face à face, à quelques centimètres de distance l'un de l'autre) penses-tu qu'ils vont se toucher ou bien se repousser ?

.....

Et si je les place ainsi ? (l'un derrière l'autre, tous deux marchant de gauche à droite, à quelques centimètres de distance l'un de l'autre).

.....

Si je les place ainsi ? (dos à dos, avec un intervalle de quelques centimètres entre eux).

.....

Et si je les place ainsi ? (dos à dos).

Il y en a un qui va se tourner. Ah! ils se sont cognés.

Ou ainsi ? (gauche à droite).

Ils vont se cogner.

Ou encore ainsi ? (les chiens marchent l'un derrière l'autre, de droite à gauche).

.....

Ou encore ainsi ? (face à face).

Ils vont se cogner.

Ou encore ainsi ? (gauche à droite).

Ils vont se repousser.

Ou encore ainsi ? (face à face).

Ils vont se cogner.

¹ Nous nous sommes contentée, dans ce protocole, de n'indiquer en détail que l'une des quatre possibilités. Pour les autres, nous avons simplement indiqué soit la position des deux chiens (face à face ou dos à dos) soit le sens dans lequel ils marchaient (de gauche à droite ou de droite à gauche). Il est bien entendu qu'il y a toujours un intervalle entre les deux chiens, au moment où la question est posée.

Ou encore ainsi ? (droite à gauche).

Ils vont se repousser, parce qu'il le regarde.

Ou ainsi ? (dos à dos).

Ils vont se cogner.

Ou ainsi ? (face à face).

Ils vont se cogner, parce qu'ils se regardent les deux.

Ou ainsi ? (gauche à droite).

Ils vont se repousser.

Ou ainsi ? (droite à gauche).

Ils vont se repousser. (Oh non ! ils se sont cognés) (faux : en réalité ils s'étaient repoussés).

2. Peux-tu placer les petits chiens de telle façon qu'ils se repoussent ?

(Le sujet les place de gauche à droite, puis face à face.)

Et autrement encore ?

(Le sujet les place dos à dos.)

Peux-tu maintenant les placer de telle façon qu'ils se repoussent ?

(Le sujet les place de gauche à droite, puis de droite à gauche.)

Peux-tu faire en sorte que les deux petits chiens se cognent ?

Oui, en les mettant les deux dos à dos ou tête à tête.

Et pour qu'ils se repoussent ?

Il faut les faire marcher en se suivant.

Dès l'âge de 8 ans, l'enfant parvient à traduire ses résultats en signes. Mais ce ne sont encore que des étiquettes qu'il met selon les indications de l'expérimentateur. Lorsque nous lui demandons de raisonner sur ces signes, il est en effet complètement perdu. Si, par exemple, nous lui demandons quel groupe de signes il doit utiliser pour obtenir un résultat positif, l'enfant est incapable de répondre avant l'âge de 11 ou 12 ans.

Les résultats de ce groupe *b*) d'expériences nous permettent de constater que l'adjonction des signes positifs n'apporte pas de difficulté supplémentaire à l'enfant. Dès l'âge de 7 ans, il résout tout aussi bien les expériences du groupe *b*) que celles du groupe *a*).

GROUPE B. EXPÉRIENCES FAISANT

INTERVENIR DEUX SORTES DE MOUVEMENTS POUR LES SIGNES MOINS
(MOUVEMENTS ROTATIF ET LINÉAIRE)

Le groupe suivant d'expériences fait intervenir deux sortes de mouvements qui représentent les différents signes, soit les signes propres et les signes opératoires. On pouvait supposer que le nouveau facteur que représentent ces mouvements discontinus retarderait l'âge auquel l'enfant peut parvenir à la solution.

Les deux expériences de ce groupe font appel au même dispositif; seul un écran supplémentaire est introduit dans la seconde d'entre elles.

Voyons la description de ces expériences :

La voiture (rotation ou changement de marche)

Dans cette expérience, chaque mouvement a pour conséquence un changement dans le sens de la marche de la voiture. Ce sens peut être inversé de deux façons différentes : par rotation de la voiture sur elle-même (à la main ou par le moyen d'une plaque tournante) et par un changement de marche (marche avant ou marche arrière). Les deux modes de rotation (à la main ou par plaque tournante) avaient l'avantage de rompre la continuité des mouvements opérés au cours de l'expérience.

Cette recherche a été poussée dans le sens de l'augmentation des inversions : on est allé jusqu'à dix inversions.

a) *Avec petit écran*

Dispositif. Une voiture pouvant rouler en marche avant et en marche arrière; une route sur laquelle nous avons fixé une plaque tournante; un écran de carton que nous posons sur la voiture.

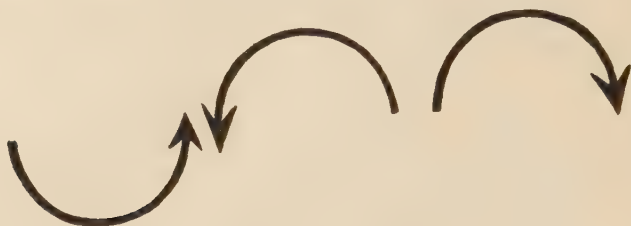
Technique. L'enfant doit deviner le sens dans lequel la voiture roulera lorsque nous la mettrons en marche après lui avoir fait exécuter les mouvements suivants :

1. $\frac{1}{2}$ tour plaque tournante,
soit une inversion : départ en sens contraire.
2. Marche arrière,
 $\frac{1}{2}$ tour plaque tournante,
soit deux inversions : départ en sens direct.
3. Marche arrière,
 $\frac{1}{2}$ rotation à la main,
 $\frac{1}{2}$ tour plaque tournante,
soit trois inversions : sens contraire.
4. Marche arrière,



deux $\frac{1}{2}$ rotations de la plaque tournante,
soit trois inversions : sens contraire.

5. Marche arrière,



trois $\frac{1}{2}$ rotations de la plaque tournante,
soit quatre inversions : sens direct.

6. Marche arrière,

trois $\frac{1}{2}$ rotations à la main (même sens),
quatre $\frac{1}{2}$ rotations de la plaque tournante (même sens),
soit huit inversions : sens direct.

7. Marche avant,

cinq $\frac{1}{2}$ rotations à la main (même sens),
cinq $\frac{1}{2}$ rotations de la plaque tournante (même sens),
soit dix inversions : sens direct.

Résultats. Les enfants de 7 ans déjà résolvait très bien la série de questions que nous leur posions. Mais nous avons remarqué un fait important : Un sujet auquel nous demandions comment il avait fait pour résoudre le problème, nous a tranquillement répondu : « C'est bien facile, je regarde le côté sale du carton ; c'est toujours devant, ce côté-là. » Nous n'avions pas remarqué que, par l'emploi, l'écran de carton blanc était légèrement défraîchi d'un côté. L'enfant se contentait ainsi, dès le début de chaque nouvel exercice, de repérer la position de la voiture par rapport à cette particularité du dispositif. Si par exemple le moteur était placé sous le côté « sale », l'expérimentateur avait beau faire exécuter à la voiture toute la gymnastique qu'il voulait, l'enfant savait qu'à la fin le moteur serait toujours sous le côté « sale ». Il était dès lors bien simple de prévoir dans quel sens la voiture roulerait lorsqu'on la mettrait en route !

Age	Réussites	Nombre de sujets
6-7	1	9
7-8	8	9
		18 Total

Ce fait nous a rendue attentive aux points de repère que pouvaient ainsi se fixer nos sujets et nous avons constaté qu'en effet presque chacun d'eux, à partir de 7 ans, âge auquel le problème est résolu, suit des yeux

les divers mouvements imprimés à la voiture, en fixant un point précis quelque part sur l'écran, même si celui-ci est parfaitement propre !

Comme on le voit d'après ces expériences, le facteur de discontinuité qu'elles présentaient a été éliminé par l'enfant. Lorsqu'on augmente le nombre d'inversions, le sujet s'en tire en prenant un indice fixe et en transformant ainsi le mouvement discontinu en mouvement continu. Devant la facilité déconcertante avec laquelle les sujets prennent un point de repère ou un indice fixe sur l'écran qui cache la voiture, nous avons décidé de remplacer ce petit écran par un grand écran cachant tout le dispositif et empêchant ainsi les sujets de suivre les rotations du regard.

b) Avec un grand écran

Dispositif. C'est le même que celui décrit à la page 129 ; seul l'écran est changé. Le nouvel écran cache le dispositif entier ; soit la voiture, la route et la plaque tournante.

Technique. Avant de placer le grand écran, on montre le dispositif au sujet, puis on place l'écran et l'on fait exécuter les mouvements habituels à la voiture, selon la technique indiquée plus haut, mais en les décrivant cette fois-ci. L'enfant doit, après chaque exercice, deviner le sens dans lequel la voiture partira lorsqu'on la mettra en route. L'enfant la voit apparaître, soit à gauche, soit à droite de l'écran, et peut ainsi vérifier sa réponse.

Résultats. Les enfants de 7 ans qui résolvaient facilement cette recherche sans le grand écran, n'y parviennent plus avec ce dernier. Il a fallu attendre l'âge de 9 ans pour que le problème soit résolu. Mais là, de nouveau, nous avons pu faire une remarque intéressante : très souvent, nous avons vu nos sujets accompagner d'un geste les descriptions verbales que nous leur faisons à propos des rotations du dispositif, ou du changement de marche de la voiture. Le geste que nous avons le plus souvent observé, est un mouvement de l'index, de gauche à droite et de droite à gauche. Nous avons vu aussi quelques mouvements semblables, de la tête. D'autres sujets enfin, nous ont affirmé suivre l'expérience dans leur tête, et dans ce cas ils n'exécutent aucun geste.

Age	Réussites	Nombre de sujets
7-8	0	7
8-9	7	10
9-10	9	10
		27 Total

Il est évident que les sujets ne parviennent à des solutions exactes qu'à partir du moment où ils découvrent le moyen de l'indice. Nous l'avons vérifié : certains de nos sujets qui se trompaient assez facilement dans les premières réponses réussissent tout à coup très bien, et le moment auquel ils commencent à réussir coïncide avec le premier geste qu'ils esquissent. Les solutions qu'ils donnent ensuite sont généralement justes.

L'indice auquel recourent les sujets n'est donc plus attaché à l'écran de la voiture puisque celui-ci a disparu et que maintenant le dispositif entier est caché derrière l'écran. Cette fois-ci les sujets ont à se tirer d'affaire sans indice de ce genre. Ils se donnent une représentation concrète (geste du doigt) ou mentale, en suivant, selon leur expression, les faits « dans leur tête ».

Remarquons que cette recherche se passe en partie sur le plan verbal : l'enfant ne voyant pas ce qui se passe derrière l'écran, l'expérimentateur est obligé de le lui décrire. Le sujet suit alors l'explication, comme nous le disions plus haut, en s'aidant d'une représentation concrète ou mentale. L'enfant de 7 ans n'en est cependant pas encore capable ; il faut attendre l'âge de 9 ans pour que cette épreuve soit résolue. Remarquons aussi que c'est déjà faire un pas vers la généralisation, et citons à ce propos Rignano racontant l'histoire de la vieille paysanne qui lui devait douze francs tandis qu'il lui en devait lui-même sept. La paysanne effectue matériellement le comptage, lui mentalement (*Psychologie du raisonnement*, p. 99-100). A ce sujet encore, Rignano remarque que la pensée ne perd jamais son objet de vue... « comme le chasseur, qui a vu disparaître le gibier dans les broussailles, ne cesse pas de le suivre « avec l'œil de l'esprit » dans tous les plus petits mouvements des branches et des feuilles des buissons mêmes » (p. 113). Puis Rignano cite Maudsley : « La physionomie d'une personne qui poursuit une pensée avec un vif intérêt est celle de quelqu'un qui cherche ardemment à voir quelque chose qu'il est difficile de voir et qui suit cette chose pour ainsi dire des yeux » (*The Physiology of Mind*, p. 381). Rignano soulève aussi la question de temps qu'implique le fait d'effectuer matériellement un compte tandis que le raisonnement peut accomplir un nombre d'expériences infiniment plus élevé et qu'il a une valeur démonstrative beaucoup plus générale (p. 118). Mais il nous faut laisser de côté ces questions de généralisation ; nous y reviendrons lorsque nous parlerons de la genèse de l'opération formelle.

Examinons de plus près les caractéristiques du groupe d'expériences dont nous venons de parler :

Avec le dispositif de la voiture (comportant plaque tournante et marche réversible) avec petit écran, l'emploi d'un point de repère apparaît vers 7 ans. Il est encore lié à l'écran de carton fixé sur la voiture. Le

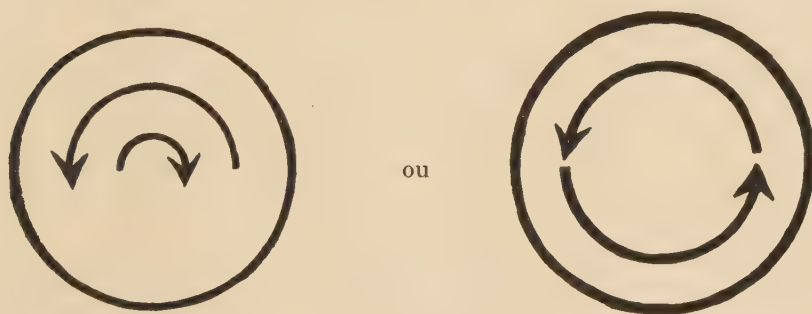
sujet suit ainsi des yeux le mouvement de la voiture en conservant un point fixe.

Avec le dispositif de la voiture (comportant plaque tournante et marche réversible) avec grand écran, l'idée d'un point de repère est acquise vers 9 ans. Il consiste en un mouvement exécuté par l'enfant lui-même, parallèle au mouvement que l'expérimentateur fait subir à la voiture, ou en un effort pour suivre par la pensée l'acte qui se déroule derrière l'écran. Il s'agit donc d'opérations concrètes ou mentales permettant aux sujets de reproduire le processus des mouvements.

Ce groupe d'expériences avait été entrepris avec l'hypothèse que des mouvements discontinus seraient une cause de retard dans la solution du problème, du point de vue de l'âge des sujets. Or tel n'a pas été le cas, puisque nos sujets ont résolu la question en faisant intervenir des points de repère.

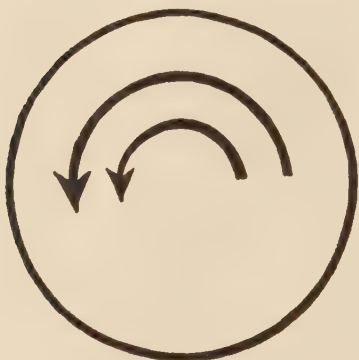
Le premier groupe d'expériences faisait intervenir les mouvements suivants :

(Perles, engrenage et poulies.)

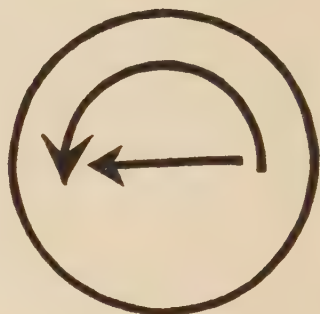


Dans le second groupe d'expériences, les perles (comportant un mouvement du sujet) et dans le troisième groupe d'expériences, la voiture (comportant plaque tournante et marche réversible), avec petit ou grand écran, font intervenir les mouvements suivants : (les flèches en demi-cercles représentent les rotations effectuées par le dispositif lui-même ou à l'aide de la plaque tournante, tandis que les segments de droite représentent la marche avant ou arrière).

Le point de repère lie les différents mouvements entre eux, il les inclut les uns à la suite des autres dans un seul mouvement, continu donc. Et les choses se passent ainsi, qu'il s'agisse de l'écran fixé sur la voiture, du geste de la tête ou du doigt, ou enfin de l'image que l'on suit dans sa tête.



Superposition



discontinuité

et

Mais il y a davantage : ce procédé nous fait retourner au rythme et à l'alternance. Les mouvements discontinus nous paraissent présenter l'avantage d'être aptes à distraire le sujet de la régularité du rythme. Or nos résultats ont montré qu'en fait, au lieu de se préoccuper de nos mouvements discontinus, le sujet se borne à suivre un indice, ce qui revient en général à faire un mouvement de gauche à droite et de droite à gauche. Il ne serait pas sans intérêt d'étudier le rôle d'un autre facteur : celui du sens dans lequel on effectue les rotations. Une rotation dans le sens de la droite ou des aiguilles d'une montre n'est-elle pas plus facile à saisir qu'une rotation dans le sens inverse ? Nous avons été obligée de laisser de côté ce problème, qui nous aurait entraînée trop loin de notre sujet proprement dit.

Le rythme et l'alternance paraissent jouer un certain rôle dans le processus mental de nos jeunes sujets. C'est pourquoi nous avons voulu nous rendre compte de l'importance de ce rôle par une expérience adaptée aux enfants du stade représentatif préopératoire déjà, et avons remarqué que si nous faisons sortir d'un tube deux perles de couleurs différentes, l'enfant envisage la suite de l'expérience avec rythme (voir exp. des perles dans un tube, p. 135).

Devant la facilité avec laquelle les enfants du stade représentatif préopératoire déjà s'attachent au rythme dans des expériences telles que les perles, l'engrenage, les poulies, la voiture avec rotation ou changement de marche, nous avons jugé nécessaire d'organiser une expérience qui nous permette de voir à quel point les enfants tiennent au rythme. Dans l'expérience de l'engrenage, en effet, l'enfant imagine facilement qu'une roue dentée tournant dans un sens, une seconde tourne dans l'autre sens, une troisième dans le sens de la première, etc. Avec le dispositif des perles, la perle rouge se trouvant au départ devant le sujet,

une rotation amène la perle bleue devant lui, une seconde rotation ramène la perle rouge, une troisième la perle bleue, etc. Le sujet peut donc se contenter de répondre à l'expérimentateur : « rouge, bleu, rouge, bleu », etc. Dans toutes ces expériences cependant, si l'expérimentateur rompt le rythme en sautant de trois à cinq roues dentées par exemple, l'enfant du stade représentatif préopératoire est perdu.

Comme le rythme annonce la réversibilité propre à la règle des signes, il concerne bien le sujet que nous nous sommes proposé d'étudier dans ce travail.

EXPÉRIENCE SUR LE RYTHME

Passons maintenant à la description de cette expérience qui ne fait pas intervenir la réversibilité elle-même, mais l'alternance. Il s'agit de deux couleurs qui s'échangent continuellement entre elles.

Comme chaque couleur laisse la place à l'autre, il y a alternance; l'effet est exactement le même que celui d'une suite d'inversions. On peut donc assimiler cette expérience aux recherches sur des successions d'inversions et dire qu'elle ne fait intervenir qu'une espèce de signes (soit les signes propres, soit les signes opératoires) car il ne s'agit que d'une sorte de mouvement. D'autre part, elle ne représente que les signes négatifs, chaque mouvement causant un changement de couleur. Voici cette expérience :

Les perles dans un tube

Dispositif. Un tube contenant huit perles, quatre rouges et quatre vertes disposées ainsi : une rouge, une verte, une rouge, une verte, une rouge, une verte, une rouge, une verte. Le chevauchement est impossible, le tube étant adapté à la grandeur des perles.

Technique et résultats. On explique à l'enfant qu'à l'intérieur du tube se trouvent des perles; on ouvre le tube et on fait sortir la première de ces perles qui est rouge. On fait aussi remarquer la perle suivante à l'enfant, perle que l'on voit apparaître et qui est verte. On ne la laisse pas sortir afin que le sujet n'aperçoive pas la couleur de la troisième perle.

On pose ensuite une première question à l'enfant, en aiguissant sa curiosité, lui faisant remarquer qu'on ne lui dira pas la couleur des perles qui sont encore à l'intérieur du tube, et que c'est à lui de deviner.

Généralement les sujets proposent toutes sortes de couleurs pour les perles suivantes. Nous avons été obligée, après quelques sondages, de

limiter le champ des possibilités en disant au sujet que le tube ne contient que des perles rouges et vertes.

Nous demandons à l'enfant de deviner la couleur des perles à l'intérieur du tube et c'est alors que l'expérience devient intéressante : Les enfants du stade représentatif préopératoire (5-6 ans surtout) nous ont tranquillement répondu : « rouge vert rouge vert rouge vert rouge vert rouge vert rouge vert... » avec toute la satisfaction que les enfants de cet âge éprouvent à se répéter. Nous avons même dû interrompre l'un de nos sujets qui n'en n'aurait peut-être jamais fini ! Les plus modestes se contentent d'une vingtaine de répétitions. Ce fait nous rappelle certaines expériences sur l'induction (voir à ce propos l'ouvrage de M^{lle} Inhelder), le plan incliné ou le billard par exemple où les enfants de ce même stade se plaisent à répéter toujours la même action, comme le tir de la bille, ne s'inquiétant nullement du problème qui a été posé par l'expérimentateur : atteindre le plot ¹.

Notre hypothèse se trouvait ainsi fortement appuyée par l'expérience, mais nous avons voulu voir encore dans quelle mesure nos sujets tiennent à ce rythme. Nous pensions que pour eux c'était la solution la plus probable ou celle à laquelle ils songeaient en premier lieu sans la considérer toutefois comme la seule possible.

Aussi leur avons-nous posé une nouvelle question, leur demandant quelle pouvait être la ou les autres solutions. Aurait-on pu arranger les perles autrement ? si oui, comment ? A cette question, les sujets répondaient en général affirmativement. Nous leur demandions alors de nous donner l'ordre de ce nouvel arrangement, et nos sujets de reprendre : rouge vert rouge vert rouge vert rouge vert... et la liste de s'allonger !

Nous les interrompons alors pour poser encore une fois la même question, avec plus d'insistance cette fois-ci. Et l'enfant de répondre avec toujours plus d'enthousiasme, insistant souvent sur le ton et rythmant les intervalles. Une petite fille par exemple disait régulièrement « rouge » d'une voix haute et « vert » sur un ton grave. Les intervalles entre la formulation de chacun de ces mots devenaient de plus en plus rythmés. Le temps entre rouge et vert était beaucoup plus court qu'entre vert et rouge. Des couples se formaient ainsi toujours plus nettement : rouge-vert, rouge-vert, rouge-vert, rouge-vert, rouge-vert, etc.

Nous posons tout de même une troisième question à l'enfant, lui affirmant qu'il y a d'autres méthodes pour arranger les perles dans le tube. Inutile, l'enfant continuait son rythme : rouge-vert, rouge-vert, rouge-vert, rouge-vert...

Découragée, nous faisons alors sortir les perles du tube... l'enfant s'y attendait, il avait raison :

¹ INHELDER, BARBEL, *De la logique concrète de l'enfant à la logique formelle de l'adolescent*. Presses universitaires de France, 1955.

<i>Age</i>	<i>Réussites</i>	<i>Nombre de sujets</i>
5-6	5	5
6-7	2	3
7-8	2	2
		10 Total

Cette fois-ci, nous remettons les perles dans le tube selon un nouvel ordre que nous faisons bien remarquer à l'enfant : trois vertes, puis trois rouges; une verte et une rouge. Même technique et mêmes résultats que tout à l'heure : l'enfant reprend un rythme, par exemple : rouge-rouge-vert-vert; rouge-rouge-vert-vert; rouge-rouge-vert-vert; etc.

Si l'enfant nous redonne l'ancien rythme : rouge-vert, rouge-vert, rouge-vert, etc., nous recommençons cette partie de l'expérience en ouvrant et vidant le contenu du tube devant lui et, pour la seconde fois, nous introduisons les perles dans le tube, dans cet ordre : trois vertes puis trois rouges, une verte et une rouge. Cette fois-ci l'enfant prend un nouveau rythme, ou s'il continue encore l'ancien : rouge-vert, rouge-vert, rouge-vert, rouge-vert, etc., nous n'insistons plus.

Non seulement nos sujets prévoient un rythme, mais encore ils ne peuvent en sortir; ils ne peuvent pas envisager autre chose et ceci même au stade concret, soit à 7 ou 8 ans encore, c'est-à-dire à l'âge où ils sont capables de résoudre les recherches dont nous avons parlé jusqu'ici.

Nous avons également interrogé des adultes¹. Les réponses qu'ils ont données sont, naturellement, fort différentes de celles des enfants : pour eux, tous les arrangements sont possibles. En général, ils se refusent même à prévoir un ordre de sortie des perles. La raison qu'ils invoquent alors, est que les chances de tomber juste sont trop petites. Un de nos sujets adultes, cependant, s'évertuait à prévoir un mélange de tous les ordres possibles; il essayait ainsi de faire une synthèse estimant que c'était là la solution la plus probablement adoptée par l'expérimentateur.

Quant aux sujets du stade représentatif préopératoire, ce sont eux qui sont le plus attachés au rythme. Il ne leur est pas encore possible de faire des hypothèses, et, partant, d'envisager d'autres possibilités.

Ils sont tout à fait incapables de réversibilité sur le plan de la pensée. En disant qu'ils ne peuvent pas faire d'hypothèses, nous voulons dire qu'il leur est impossible de supposer quelque chose, et de revenir en arrière pour l'annuler au cas où l'expérience le démentirait.

Les expériences de Piaget, ainsi que celles que nous relatons dans ce travail, sont assez concluantes à ce sujet.

¹ 5 adultes.

EXPÉRIENCES PRÉLIMINAIRES

Nous passerons maintenant à la description de deux expériences concrètes qui ne sont résolues que tardivement. Il s'agit de deux de nos expériences préliminaires. Le principal reproche qu'on peut leur adresser est de faire intervenir des dispositifs trop complexes pour une illustration de la règle des signes. Elles offrent trop de difficultés aux enfants du niveau concret et ne sont même résolues que par un certain nombre d'enfants du niveau formel. Or, une bonne représentation de la règle des signes devrait être saisie au niveau des opérations concrètes déjà. Comme nous l'avons dit dans notre *Aperçu des méthodes pédagogiques*, cette thèse n'est, à notre connaissance du moins, soutenue par aucun mathématicien (p. 27-45).

La première de ces expériences ne fait intervenir qu'une espèce de signes, soit les signes propres, soit les signes opératoires. Il s'agit ainsi d'une représentation de la règle des signes additive. Voici cette expérience :

a) *Les poulies* ¹

Dispositif. C'est le même que celui que nous avons employé pour l'étude d'une succession d'inversions (p. 121), à cette différence près que les courroies peuvent être croisées ou non croisées. Les courroies croisées inversent le sens de rotation des poulies et peuvent ainsi être assimilées au signe moins tandis que les courroies non croisées conservent le sens de rotation des poulies et correspondent ainsi au signe plus. La succession des courroies croisées ou non croisées n'est pas régulière, mais quelconque.

Technique. Les poulies sont mobiles; c'est le sujet lui-même qui les monte sur la planche. Il les relie ensuite au moyen de courroies. La seule recommandation que nous lui adressons est de ne pas mettre plus de deux courroies sur la même poulie. Nous lui faisons remarquer aussi qu'il peut croiser ou ne pas croiser chacune des courroies, à sa guise. Au fur et à mesure que le sujet a placé une nouvelle poulie et courroie, nous lui demandons de nous dire dans quel sens il pense que cette dernière poulie tournera.

Résultats. Il faut attendre l'âge de 14 ans pour que les sujets nous donnent de bonnes réponses. A ce moment, ils se rendent compte que chaque fois qu'ils croisent une courroie, le sens dans lequel tourne la dernière poulie est inversé. Certains d'entre eux sont capables de nous dire aussi qu'un nombre pair de courroies croisées restitue le sens de

¹ Cette expérience a fait l'objet d'un remarquable exposé de M. Van Cauwenberghe, au semestre d'été 1949, à la Conférence de psychologie expérimentale de l'Université de Genève.

départ, tandis qu'un nombre impair de courroies croisées donne le sens contraire au sens de départ. Ces sujets ont remarqué aussi que les courroies non croisées ne jouent aucun rôle quant aux inversions. Ils ont donc, de leurs observations, extrait la loi dont nous avons parlé à propos des premiers groupes d'expériences concernant une suite d'inversions.

Age	Réussites	Nombre de sujets
12-13	0	6
13-14	2	6
14-15	4	6
15-16	0	2
		20 Total

Cette expérience est intéressante par le fait qu'elle met en œuvre deux sens opposés; mais, comme nous l'avons dit plus haut, elle est malheureusement un peu difficile à comprendre.

Passons à la seconde de ces expériences :

b) *Les miroirs*

Dispositif. Deux miroirs, une feuille de papier transparent de même format que les miroirs et sur laquelle le mot « étoile » est écrit à l'encre. De l'autre côté de cette feuille, on a passé le mot « étoile » au crayon noir, tel qu'il est vu par transparence. Nous plaçons la feuille de papier sur la table de telle façon qu'on lise le mot « étoile » écrit à l'encre. Si, au haut de la feuille, nous plaçons un miroir vertical, perpendiculaire à la feuille, le mot « étoile » est reflété de telle façon qu'il est presque illisible. Au contraire, si nous plaçons un second miroir, parallèle au premier, au bas de la feuille transparente, l'image reflétée par ce second miroir donne le mot « étoile » dans sa figuration normale, c'est-à-dire tel qu'il est écrit à l'encre sur la feuille de papier. Cette partie de l'expérience illustre le fait que deux inversions ramènent l'ordre direct.

Ce sont deux inversions de même espèce; il s'agit en effet de la répétition d'une même opération (la réflexion par un miroir) et par conséquent d'une représentation de la règle des signes additive.

Mais cette façon de procéder n'est pas la seule : on peut aussi obtenir une écriture correcte dans le miroir, en retournant la feuille de papier transparent, en la mettant donc du côté du mot écrit au crayon et en supprimant le second miroir.

Cette façon de procéder introduit une seconde sorte de mouvement dans l'expérience, si bien que l'utilisation simultanée des deux procédés, à savoir la rotation de 180° de la feuille transparente et l'emploi du miroir font de cette expérience une représentation de la règle des signes multiplicative.

Technique. Voici les questions que nous avons posées aux sujets :

1. L'un des miroirs seulement étant présent, on place un écran devant ce miroir et on demande au sujet de deviner comment sera reflété le mot « étoile » qu'il voit sur la feuille. Puis on lui permet de regarder en lui demandant de dire comment il le voit.

2. a) On demande au sujet de faire en sorte que le mot soit reflété dans le miroir, en écriture habituelle, c'est-à-dire comme le mot qui est écrit à l'encre sur la feuille.

Soit que le sujet s'avoue incapable de le faire ou qu'il réussisse à tourner la feuille et ainsi à obtenir le résultat demandé, on passe à la question :

b) On lui donne un second miroir en lui demandant de faire en sorte que le mot soit reflété d'une façon tout à fait lisible, c'est-à-dire en écriture habituelle sur ce second miroir, après avoir déjà été reflété par le premier miroir.

Cette technique a encore été complétée au cours de l'expérimentation et un certain nombre de nos sujets a été interrogé sur l'un ou l'autre ou sur plusieurs des points suivants :

1. a) Que donne le mot écrit à l'encre (écriture habituelle) et un miroir ?

b) Que donne le mot écrit à l'encre (écriture habituelle) et deux miroirs ?

c) Que donne le mot écrit au crayon (écriture par transparence, peu lisible) et un miroir ?

d) Que donne le mot écrit au crayon (écriture par transparence, peu lisible) et deux miroirs ?

2. L'expérimentateur demande au sujet ce que l'on voit au loin lorsqu'on regarde dans le miroir, si en face de celui-ci se trouve l'autre miroir, et entre deux, à angle droit la feuille tournée du côté sur lequel on a écrit le mot « étoile » à l'encre. (Résultats : un mot difficile à lire, un mot facile à lire, un mot difficile à lire, un mot facile à lire, etc.) Cette dernière question porte donc sur une suite d'inversions : un nombre pair d'inversions donne le mot écrit lisiblement, un nombre impair d'inversions le donne en écriture peu lisible.

3. L'expérimentateur demande au sujet combien il y a de moyens différents pour lire facilement le mot dans le miroir. (Résultat : les deux miroirs avec écriture habituelle ou un seul avec écriture au crayon, par transparence.)

Résultats. Nous avons examiné des sujets de 9 à 13 ans. Les résultats varient beaucoup suivant les sujets. A partir de neuf ans, une partie de ces questions sont résolues. C'est surtout dans les premières que réside la difficulté. Le sujet ne parvient généralement pas à trouver le ou

les moyens d'obtenir une écriture facilement lisible dans le miroir. A 12 ans, il arrive que toutes les réponses soient correctes. Mais, comme nous le disions déjà à propos de l'expérience des poulies, trop peu nombreux sont les sujets qui saisissent l'expérience, même au niveau des opérations formelles. Ces deux expériences d'autre part, prennent trop de temps. Elles ne constituent donc pas une bonne illustration de la règle des signes.

<i>Age</i>	<i>Réussites</i>	<i>Nombre de sujets</i>
9-10	2	5
10-11	2	6
11-12	3	5
12-13	4	6
		22 Total

II. EXPÉRIENCES QUANTITATIVES

Comme nous l'avons déjà vu dans cette Troisième partie, la règle des signes suppose une structure logique, mais elle implique également le maniement du nombre. D'après Piaget, l'essentiel est la structure logique, qualitative, et non pas le moment où le nombre est introduit. Nous avons entrepris des travaux expérimentaux afin de vérifier si une fois la structure logique acquise, l'introduction du nombre ne constitue pas une difficulté supplémentaire.

Les expériences sur des successions d'inversions que nous avons décrites dans cette Troisième partie, constituent des situations particulièrement propices à la généralisation. L'enfant de 7 ou 8 ans, après trois rotations du dispositif des perles par exemple, comprend ce qui se passe. L'expérimentateur peut lui demander quelle sera la perle qui se trouvera devant lui après quarante rotations, il saura dire que ce sera la perle rouge, de même après quarante et une rotations, il saura que ce sera la bleue, etc. Cette généralisation de l'opération marque le passage au nombre ou tout au moins à la distinction de pair et impair.

Quant au nombre lui-même, nous l'avons introduit dans nos expériences génétiques. On se souvient que la règle des signes multiplicative, simultanément qualitative et quantitative, est saisie dès l'âge de 8 ans. Nous pouvons donc dire que dès que la règle des signes est saisie sur le plan purement logique, elle l'est aussi sur le plan numérique.

Nous avons cependant encore organisé deux expériences se concentrant sur l'étude du nombre. Les résultats de la première d'entre elles (expérience des chemins) ont montré qu'elle fait appel à des notions trop complexes pour les enfants du stade des opérations concrètes

(de 7 à 12 ans). Il convient, en effet, qu'une bonne représentation de la règle des signes soit facilement saisie dès l'école primaire. Un exemple concret de la règle des signes qui s'adresserait à l'école du niveau secondaire aurait sans doute son utilité, mais ce n'est pas là le but que nous poursuivons, puisque nous nous concentrons ici sur l'étude du niveau des opérations concrètes.

Aussi, avons-nous imaginé une seconde expérience, tenant compte des données de la première. Cette expérience (expérience des ponts) s'est révélée excellente. Le dispositif et la technique sont les mêmes que dans l'expérience des chemins, mais les facteurs causant de trop grandes difficultés aux enfants du stade des opérations concrètes, et ne jouant aucun rôle quant à la règle des signes (point de vue auquel nous nous plaçons) ont été supprimés; l'expérience ainsi remaniée est résolue dès l'âge de 7 ou 8 ans.

Il s'agit d'expériences sur l'équivalence. Lors de nos expériences précédentes, nous avons déjà soulevé la question de l'équivalence à plusieurs reprises, mais uniquement en ce qui concerne les signes. Dans le dispositif de l'engrenage, par exemple, deux roues dentées rétablissent le sens de départ. Au point de vue sens de rotation, cela revient au même, que l'on ajoute deux roues dentées ou que l'on n'en ajoute aucune. Il en va de même avec les perles : après deux rotations elles se retrouvent dans leur ordre de départ. Comme le dit le professeur de certains de nos sujets : tourner son matelas deux fois tous les jours ou ne pas le tourner du tout, cela revient au même (sauf au point de vue de l'hygiène). Il est toujours possible aussi, comme nous l'avons dit, de remplacer deux signes négatifs par un signe positif. Cette équivalence peut se formuler ainsi : multiplier une quantité négative par une quantité négative donne un produit positif. La multiplication de deux quantités négatives, comme la multiplication de deux quantités positives, donne donc un résultat positif. C'est pourquoi nous disons que ces opérations sont équivalentes.

Dans les expériences qui vont suivre, nous avons insisté en revanche sur les quantités. Celles-ci sont toujours les mêmes; seuls les signes varient. Mais, comme nous le verrons, le fait que les nombres restent les mêmes n'est pas évident pour les enfants. Ils ne pensent pas que ce sera toujours la même quantité de paquets de jetons qu'il faudra enlever ou ajouter.

Voyons la première de ces expériences :

1. LES CHEMINS

Dispositif

Deux bonshommes : un cuisinier et un ramoneur. Trois drapeaux. Des paquets de deux, de trois et de six bandes de papier de quatre centimètres de longueur et d'un centimètre environ de largeur, de couleur

rouge ou bleue. Une grande feuille de papier servant de base au jeu, de quarante sur cinquante centimètres, et divisée dans le sens de la longueur en douze bandes égales par onze lignes parallèles distantes de quatre centimètres environ.

Le sujet est assis à une table, l'expérimentateur en face de lui. La feuille de papier servant de base au jeu est posée sur la table et s'étend dans le sens de sa longueur entre le sujet et l'expérimentateur.

Technique

Nous disons à l'enfant que les deux personnages, soit le cuisinier et le ramoneur, décident d'aller se promener et c'est nous qui devons préparer leurs chemins à l'avance. Chaque petite bande de papier représente en effet un petit chemin. Nous disposons de chemins rouges et de chemins bleus : les rouges par exemple pour effectuer les trajets du sujet à l'expérimentateur et les bleus pour effectuer les trajets de l'expérimentateur au sujet. Pour que l'un des personnages puisse avancer d'un chemin, il faut déposer une bande de papier dans le sens de sa longueur, sur le premier espace de la feuille de papier de base (la longueur des petites feuilles de papier ou chemins correspond en effet à la largeur de l'un des douze espaces de la feuille de base, tous deux mesurant quatre centimètres) et ainsi de suite.

L'expérimentateur fait ensuite quelques démonstrations à l'enfant, selon les schémas suivants en les commentant comme suit : « Préparons

Expérimentateur

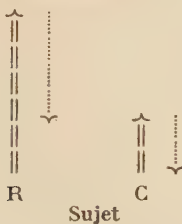


Fig. 1.



Fig. 2.

la route du ramoneur. Je le place devant toi. Je prends trois paquets de deux petits chemins rouges (représentés dans nos graphiques par le signe =). Combien cela fera-t-il de petits chemins en tout ? Puis, je prends des chemins bleus (les bleus font reculer); j'en prends deux paquets de deux (représentés ci-contre par le signe). Combien cela fera-t-il ? Le cuisinier aussi fera une promenade, je le place devant toi. Je prends un paquet de deux chemins rouges et un paquet de deux chemins bleus. Je place un drapeau à l'arrivée du ramoneur et un autre

drapeau à l'arrivée du cuisinier. Maintenant je ramène ¹ le ramoneur à son point de départ, car je veux faire des changements à sa route. J'enlève aussi son drapeau. Jusqu'à présent, j'ai toujours posé des chemins; maintenant au contraire, je vais enlever les deux derniers. Je fais exécuter le trajet au ramoneur; il arrive donc ici, où je place son petit drapeau. Puis je décide de lui enlever encore deux petits chemins bleus. Avant de la faire, je ramène le ramoneur à son point de départ et j'ôte le ramoneur à son point de départ et j'ôte son petit drapeau. Je lui fais ensuite exécuter son nouveau trajet. Jusqu'où arrivera-t-il ? Je place son drapeau à son point d'arrivée.



Fig. 3.



Fig. 4.

» Nous allons encore faire des changements dans les routes. Je place donc de nouveau le ramoneur à son point de départ et j'enlève son drapeau. J'ajoute un paquet de six chemins rouges au ramoneur, qui arrivera donc ici (à l'extrémité de la feuille), et je continue en posant des petits chemins bleus. Pour le faire, je ramène toujours le ramoneur à son point de départ. Je prends cinq paquets de deux chemins bleus. Combien cela fera-t-il ? Quant au cuisinier, je lui enlève tous ses petits chemins; on peut donc laisser son drapeau où il est, puisqu'il est revenu à son point de départ. Nous mettons aussi le ramoneur à son point de départ, tandis que nous plaçons son drapeau à son dernier point d'arrivée. »

Nous laissons le jeu tel qu'il est, c'est-à-dire comme notre dernier schéma le représente, et commençons la véritable expérience. Voici la consigne que nous donnons à l'enfant : « Maintenant c'est à toi de jouer. Regarde donc bien : voici un drapeau, que je place sur cette ligne (point 1 de la figure 5). Tous deux, le ramoneur et le cuisinier, veulent venir

¹ On remarquera que nous ramenons sans cesse les personnages à leur point de départ, ceci pour éviter qu'ils n'avancent sur des chemins bleus destinés au recul, ou ne reculent sur des chemins rouges destinés à l'avance.

planter leur drapeau sur la même ligne. Pour cela il faut que tu prépares à chacun sa route. Tu peux poser ou enlever des chemins, des rouges ou des bleus, mais je tiens à ce que tu en déplaces le moins possible. Il ne doit pas non plus rester sur le jeu des petits chemins que les bonshommes n'utiliseraient pas pour atteindre leur but. » Quand le sujet a exécuté ce que nous lui demandions, nous passons à une seconde, puis à une troisième situation des drapeaux. Ceux-ci sont ainsi placés successivement sur trois lignes différentes (points 2, 3, 4 de la figure 5). Nous sommes souvent obligée de répéter la consigne et de corriger les erreurs au fur et à mesure qu'elles se présentent, sans quoi nous resterions en dehors du problème que nous nous sommes proposée d'étudier.

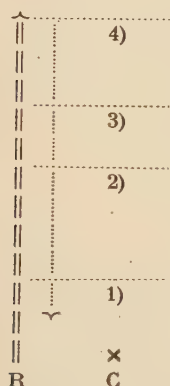


Fig. 5.

Expérimentateur

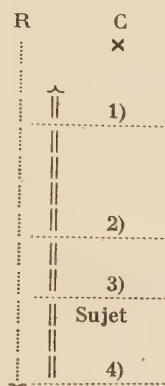


Fig. 6.

Nous demandons ensuite au sujet de faire de même, mais dans le sens opposé, c'est-à-dire dans la direction de l'expérimentateur au sujet. Voici l'explication que nous lui donnons : « Je vais de nouveau faire des transformations dans les routes. Je place donc le cuisinier et le ramoneur à leur point de départ, qui se trouve de mon côté cette fois-ci. J'ôte tous les petits chemins du cuisinier, tandis que j'enlève deux petits chemins rouges au ramoneur et que je lui ajoute deux paquets de six chemins bleus. Combien de chemins bleus cela fera-t-il ? Voici donc le trajet qu'il peut effectuer. Plaçons son petit drapeau à son point d'arrivée et remettons-le lui-même à son point de départ, comme le cuisinier. » Nous donnons ensuite à l'enfant la même consigne que tout à l'heure, lui demandant donc de faire en sorte que les trois drapeaux se trouvent sur la même ligne. Les drapeaux sont aussi placés sur quatre lignes successivement.

Remarquons que dans cette expérience nous avons sans cesse fait intervenir la multiplication numérique. A cet effet, nous avons placé une boîte à la droite de l'enfant, contenant des paquets de chemins. L'enfant était tenu de se servir dans cette boîte et de prendre à l'avance le nombre de paquets qu'il jugeait nécessaires à la construction de la route. Il pouvait choisir entre les paquets de deux, de trois ou de six. Quant aux chemins qui avaient été utilisés et qui se trouvaient donc sous forme d'unités, ils étaient mis par l'enfant dans une boîte placée à sa gauche.

Résumons la technique qui se compose de trois parties : l'introduction à l'expérience; le premier sens, du sujet à l'expérimentateur; le sens opposé, de l'expérimentateur au sujet. L'introduction a pour but d'initier l'enfant au jeu, de lui montrer la signification des couleurs, de la pose et de l'enlèvement des chemins, etc. L'expérience se résume dans une première et une seconde série de quatre positions de drapeaux. Chacune de ces positions exige que l'enfant résolve les trois points suivants : 1) une multiplication numérique telle que trois paquets de deux chemins font six chemins; 2) une construction de route pour le cuisinier; 3) une construction de route pour le ramoneur. La technique comporte donc vingt-quatre questions au total.

Résultats

Nous avons interrogé des enfants de 5 à 13 ans, de même que des adultes. Les enfants de 5 à 7 ans ne saisissent pas du tout l'équivalence; ils n'établissent aucune relation entre le cuisinier et le ramoneur. De leur point de vue, chacun de ces personnages existe pour lui-même. A partir du stade concret (dès 7 ans), on voit les enfants additionner les chemins des paquets, ou même encore attendre que les chemins soient posés pour les compter, unité par unité. A partir de 8 ans, les sujets font des multiplications, mais il arrive encore assez fréquemment qu'ils transforment les multiplications que nous leur proposons en additions.

Ce n'est qu'au stade formel (dès 12 ans) que nous avons trouvé des réponses satisfaisantes telles que : « On enlève à l'un autant de chemins qu'on en remet pour l'autre quand ils veulent aller au même endroit. »

Age	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13
Réussites	0	0	2	2	3	4	7	7
Nombre de sujets	5	4	5	4	7	10	10	9

Total : 54 sujets.

Cette technique est difficilement saisie par les sujets, qui ont beaucoup de peine à admettre le détour formé par le chemin d'aller et retour et qui sont sans cesse tentés de défaire ce détour tout entier au lieu de s'en

tenir à la consigne qui leur prescrit d'enlever le moins de petits chemins possible. C'est là certainement la cause du retard dans la solution de cette expérience, du point de vue de l'âge des sujets.

Quant aux signes, cette expérience fait également intervenir une multiplication. En même temps qu'il choisit entre poser ou enlever un jeton, l'enfant songe à la couleur et se décide soit pour le rouge, soit pour le bleu. Les deux facteurs qui représentent ici les signes propres et opératoires sont donc les actes d'enlever ou d'ajouter; le sens du parcours est représenté par la couleur des chemins posés.

2. LES PONTS

Dispositif et technique

Voyons maintenant la seconde de ces expériences :

Deux bonshommes : un cuisinier et un ramoneur. Un drapeau. Des paquets de deux, de trois et de six bandes de papier de quatre centimètres de longueur et d'un centimètre environ de largeur, de couleur rouge ou bleue. Une grande feuille de papier servant de base au jeu, de quarante sur cinquante centimètres, et divisée dans le sens de la longueur en douze bandes égales par onze lignes parallèles, distantes entre elles de quatre centimètres environ.

De simples lignes au crayon, espacées entre elles d'une distance correspondant à la longueur des ponts formaient les douze divisions de la feuille de base. Ces lignes étaient là pour faciliter la comparaison des points d'arrivée du ramoneur et du cuisinier. Une difficulté subsistait cependant : quand l'un des personnages avait avancé, l'enfant le plaçait, par rapport à lui-même, en deçà du trait de crayon; mais quand le personnage avait reculé, l'enfant le plaçait au-delà du trait de crayon. Les points d'arrivée pouvaient ainsi donner lieu à des discussions, le sujet pouvant ou non les considérer comme équivalents. Un trait aussi large que la base des personnages supprime toute ambiguïté. C'est pourquoi nous avons remplacé sur notre feuille de base les traits fins par des traits d'un centimètre de largeur. Mais leur importance nous obligeait alors à leur donner une signification; nous avons donc pris l'habitude de les considérer comme des planches. Du même coup, les petits chemins sont devenus des ponts reliant les planches les unes aux autres, et la feuille de base représente l'eau.

Quant à l'eau, nos jeunes enfants y croient facilement; elle donne plus de vie à l'expérience et il se trouve qu'elle est fort simple à représenter, un fond de papier bleu clair contentant largement nos sujets. Dès lors, l'expérience devient captivante et c'est avec un soin tout particulier que nos jeunes sujets surtout placent les ponts d'une planche à l'autre, prenant garde que les bonshommes ne tombent pas dans l'eau. D'autre

part, le fait qu'il y a de l'eau et qu'on ne peut pas la traverser sans pont, donne davantage de raison d'être à l'expérience. Il est nécessaire de construire une route composée d'une suite de ponts, pour que les bonshommes puissent avancer sans se mouiller.

L'enfant joue avec l'un des bonshommes; l'expérimentateur, placé en face de lui, joue avec l'autre. L'enfant emploie les jetons d'une certaine couleur, l'expérimentateur, les jetons de l'autre couleur. L'enfant peut choisir la couleur qu'il préfère.

On place un drapeau tantôt sur une ligne, tantôt sur l'autre. Chaque fois le ramoneur et le cuisinier doivent arriver sur la ligne du drapeau. L'expérimentateur commence par placer le drapeau sur la septième planche (fig. 1). Il s'agit de préparer les ponts pour chacun des personnages. Sujet et expérimentateur le font chacun pour le leur. Puis chacun d'eux fait avancer son bonhomme jusqu'à la planche sur laquelle se trouve le drapeau. Ensuite on remet les deux personnages à leur point de départ respectif, c'est-à-dire chacun sur sa première planche. L'expérimentateur place le drapeau ailleurs, trois planches plus loin par exemple (fig. 2), et demande au sujet de préparer les ponts pour son personnage afin qu'il puisse se rendre sur la planche du drapeau et de telle sorte, aussi, qu'il n'y ait pas de ponts inutiles. Pour aider l'enfant, l'expérimentateur lui pose la question suivante : « Combien de ponts faudra-t-il que tu enlèves ou que tu ajoutes ? et moi ? » Le sujet doit ainsi donner le nombre de ponts à enlever ou à ajouter pour son personnage ainsi que pour celui de l'expérimentateur.

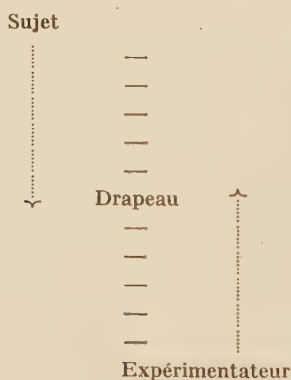


Fig. 1.

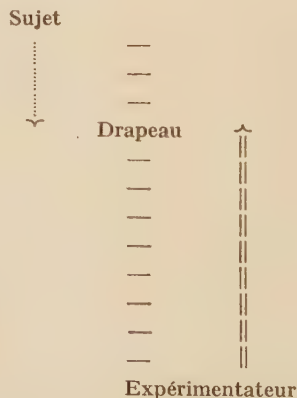


Fig. 2.

Puis on passe à une nouvelle position du drapeau. La feuille de base est divisée en douze parties, ce qui permet des multiplications numériques, de l'ordre de deux fois deux, deux fois trois, etc. La seconde

position du drapeau se trouve à quatre intervalles de la première. Si l'on n'offre que des paquets de jetons à l'enfant, il faudra qu'il prenne deux paquets de deux jetons, ou un paquet de quatre jetons. Ce procédé oblige ainsi le sujet à exécuter de petites multiplications.

Puis on déplace de nouveau le drapeau, et l'expérience se répète ainsi, jusqu'au moment où l'enfant se rend compte que c'est toujours le même nombre de ponts qu'il faut enlever ou ajouter, selon le sens. Les positions que l'on donne successivement au drapeau sont les mêmes pour chacun de nos sujets.

Avec cette technique, il est fort aisé de jouer dans les deux sens. Parfois c'est l'enfant qui ajoute des ponts, parfois c'est l'expérimentateur. Quand l'expérimentateur joue, c'est le sujet qui doit lui suggérer ce qu'il doit faire.

Résultats

Pour nous rendre compte du moment auquel l'enfant parvient à l'équivalence, nous l'avons non seulement observé attentivement dans son jeu et dans son comportement, mais nous lui avons encore demandé chaque fois combien de ponts il ôtait et combien il en ajoutait. Il était ainsi facile de se rendre compte si l'enfant faisait ses calculs pour chacun de ses deux personnages ou s'il avait saisi l'équivalence et ne comptait que pour l'un ou l'autre des deux.

Les multiplications numériques sont facilement résolues à 7 ans, tandis que jusqu'à 8 ans, il semble que l'enfant doit faire au moins neuf essais avant d'arriver à la notion d'équivalence. C'est-à-dire qu'à 7 ans encore, l'enfant ne voit pas que, s'il enlève un certain nombre de paquets de ponts à l'un des bonshommes, il doit en ajouter autant à l'autre. Au contraire, il calcule pour l'un, puis pour l'autre, et ne se rend à l'évidence de l'égalité qu'après avoir fait de nombreuses fois le double calcul. A partir de 8 ans, l'équivalence est saisie dès le deuxième ou le troisième essai.

<i>Age</i>	<i>Réussites</i>	<i>Nombre de sujets</i>
6-7	0	5
7-8	1	5
8-9	4	5
		15 Total

Dès la première intervention de l'enfant dans le jeu, nous pouvons nous rendre compte s'il a, oui ou non, la notion d'équivalence. S'il ne l'a pas, la suite du jeu nous montre à quel moment il y parvient. Du point de vue des recherches sur l'équivalence, cette technique est excellente. Cette expérience montre que c'est à partir de 8 ans seulement que

l'enfant est capable de saisir l'équivalence. Il comprend alors qu'ajouter un certain nombre de fois une quantité dans un sens, revient à enlever un certain nombre de fois cette même quantité dans l'autre sens.

CONCLUSION DE LA TROISIÈME PARTIE

En conclusion, nous constatons, du point de vue pédagogique, que les partisans des méthodes actives ou concrètes ont raison. Il faut cependant ajouter que nous avons toujours insisté dans nos expériences, sur les points essentiels à la compréhension des enfants. En effet, comme le dit Piaget, « l'expérience ne saurait instruire l'enfant qu'à condition d'être elle-même convenablement structurée par un effort actif ».

QUATRIÈME PARTIE

Opérations formelles

I. EXPÉRIENCES LOGIQUES

La logique est une science axiomatique, c'est-à-dire une science hypothético-déductive qui réduit au minimum les appels à l'expérience pour construire librement son objet au moyen d'axiomes (propositions indémontrables) qu'elle combine entre eux selon toutes les possibilités et de la façon la plus rigoureuse. Toute axiomatique se réfère cependant à un savoir réel en dehors duquel elle perdrait sa signification. Sa construction n'est utile que si elle représente une réalité, un prolongement idéal mais possible. L'utilité d'une axiomatique est en effet de permettre la construction de modèles simplifiés du réel, modèles du point de vue des faits dont ils tracent les lignes principales et du point de vue de la pensée à laquelle ils servent de charpente. Comme nous le dirons selon l'expression de Gonseth, à propos des mathématiques, une axiomatique constitue un « schéma » de la réalité. Mais à cause de ce caractère schématique, une axiomatique ne peut pas prétendre remplacer la science expérimentale qui lui correspond, c'est-à-dire qui porte sur le secteur de réalité dont l'axiomatique constitue le schéma. Ainsi, l'axiomatique ne fondera jamais la science inductive mais à toute axiomatique peut correspondre une telle science. En dégageant cette science de ses attaches expérimentales, pour mieux en définir le mécanisme intellectuel, l'axiomatique prépare les instruments qui permettent à cette science de prendre possession de son objet concret et ceci d'autant plus fermement que l'analyse de son fonctionnement formel aura davantage affiné ces instruments de dissection.

La logique est l'axiomatique de la raison, de la pensée elle-même. La science expérimentale correspondant à la logique est la psychologie de l'intelligence. Les opérations logistiques correspondent en effet toujours à des opérations de la pensée; il faut nécessairement passer par des opérations réelles de l'esprit, le caractère essentiel de la pensée logique étant d'être opératoire, c'est-à-dire de prolonger la pensée en l'intériorisant. Or la nature spécifique des opérations tient au fait qu'elles n'existent jamais à l'état discontinu. Une seule opération ne saurait être une

opération, car le propre des opérations est de constituer des systèmes. Ainsi pour que la logique soit adéquate au travail de l'esprit, il faut qu'elle exprime les lois d'équilibre de ces systèmes, c'est-à-dire les lois de totalité. La psychologie opératoire ayant montré assez clairement que les opérations réelles, loin de se composer d'éléments discontinus et isolés consistent toujours en systèmes d'ensemble, structurés en tant que totalités et reconnaissables à leur composition réversible, il est possible de construire une logistique des systèmes d'ensemble. C'est en vue d'assurer cette liaison du concret et de l'abstrait que Piaget a écrit son *Traité de logique*¹.

Qu'est-ce donc qu'une opération logique ? Résumons l'exemple que donne Piaget : « La perception d'une collection d'arbres plus ou moins grands n'est pas encore une opération logique. Par contre, en tant qu'elle englobe déjà des facteurs de classification ou de sériation, elle annonce les opérations logiques, mais celles-ci doivent être détachées de la perception actuelle et fonctionner en elles-mêmes; elles seront alors réversibles puisqu'une réunion ou une série peuvent se défaire à volonté. Déplanter des arbres pour les replanter ne constitue pas une opération logique; ces opérations n'étant réversibles qu'en apparence. Elles impliquent par exemple le temps, qui est irréversible. Mais par la pensée, je peux évoquer et poser l'arbre déplanté. Toute action et toute perception peuvent ainsi être annulées ou inversées en esprit, et ainsi l'action ou le changement perçu se prolongent en réalités logiques (concepts, relations, etc.), c'est-à-dire réversibles. » C'est donc la pensée qui réalise la réversibilité opératoire rigoureuse.

Dans les opérations logiques, l'objet individuel n'est qu'une unité qualitative et le problème n'est pas de savoir combien de ces unités interviennent, mais en vertu de quelles qualités. En logique, les classes et les relations seront ainsi définies les unes et les autres par des qualités conceptuelles, ne faisant intervenir ni nombre ni unités.

Son fondement

La logique, comme les mathématiques, ne s'appuie sur rien d'autre que sur elle-même.

Sa construction

D'autre part, nous verrons que la notion de « groupe » est une notion centrale dans l'ordonnance de la pensée mathématique. Dans les systèmes qualitatifs propres à la pensée logique, telles que les classifications simples, les tables à double entrée, les sériations de relation, etc., on trouve des systèmes d'ensemble correspondants. En 1942, cette notion de totalité logique a été introduite par Piaget sous le nom de groupement.

¹ PIAGET, JEAN, *Traité de logique*. Paris, Armand Colin, 1949.

Piaget consacre tout son ouvrage : *Classes, relations et nombres*, à démontrer que les opérations logiques constituent des groupements. Du point de vue logistique, le groupement présente une structure bien définie, parente de celle du groupe et dont les règles opératoires constituent cette logique des totalités qui traduit en un schéma axiomatique le travail effectif de l'esprit, au niveau opératoire de son développement, c'est-à-dire en sa forme d'équilibre supérieure. L'étude de ces groupements nous conduit à distinguer deux domaines en logistique : d'une part les opérations de classes et de relations qui sont intrapositionnelles et, d'autre part, les opérations sur des propositions qui sont interpropositionnelles. Les secondes sont supérieures aux premières et portent sur leurs résultats puisqu'une proposition est en son contenu une opération de classement ou de relations. Quant aux différentes espèces de groupements que ces deux sortes de logique comportent, le lecteur peut consulter à ce propos le *Mécanisme de développement mental* ou la *Psychologie de l'intelligence*¹.

Il n'est pas inutile non plus de souligner le fait que si les groupements logiques ont les mêmes propriétés de composition associative et de réversibilité que les groupes mathématiques, ils conduisent bien à un raisonnement rigoureux mais beaucoup moins fécond que les compositions de nombres. L'explication en est que les classes et les relations ne comportent pas l'itération, qui est due justement à la fusion de la classe et de la relation. L'itération est l'apanage des mathématiques et c'est à elle qu'est due leur fécondité.

Ses rapports avec l'objet

La logique porte sur l'activité du sujet, sur la validité interne des systèmes de propositions, c'est-à-dire sur la manière dont une proposition en entraîne ou en exclut une autre. La logique ne s'occupe donc que de la systématisation et de la cohérence internes des opérations et non pas de leurs relations avec l'objet. On a coutume de distinguer une vérité réelle ou accord des propositions avec l'expérience et une vérité formelle ou accord des propositions entre elles. La vérité réelle concerne les sciences expérimentales tandis que la vérité formelle est l'objet de la logique. Ainsi la logique n'a pas à établir une théorie de l'expérience. Ce n'est pas elle qui décide qu'une proposition est vraie ou fausse par rapport aux faits. Elle reçoit simplement à titre de données des énoncés qualifiés de vrais ou de faux. Son travail commence avec la composition formelle de ces énoncés, vrais ou faux par hypothèse. Elle montre alors comment ces énoncés combinés entre eux aboutissent à des conséquences

¹ PIAGET, JEAN, *Le mécanisme du développement mental*. Genève, « Archives de Psychologie », N° 112, t. VIII, p. 42-45.

PIAGET, JEAN, *Psychologie de l'intelligence*. Paris, Armand Colin, 1947, p. 56-61.

formellement nécessaires ou à des contradictions, selon que sont respectées ou non certaines structures formelles de composition. C'est en ce sens que la logique s'intéresse à la forme pure et ne s'occupe en rien de l'objet lui-même, lequel concerne les sciences expérimentales et l'épistémologie.

Nous avons déjà relevé le fait que les structures logiques expriment les lois de la pensée. Plaçons-nous maintenant au point de vue de la psychologie génétique. Ce n'est qu'au dernier stade de son développement que la pensée atteint son équilibre complet. N'importe quelle hypothèse ne correspondant à aucune perception ancienne, ni même possible, peut alors donner lieu à un raisonnement correct. C'est ainsi que le test de Burt ¹, exemple de sériation sur de simples assumptions, donne lieu à des réponses justes à partir de 11 ou 12 ans seulement. Toute épreuve de raisonnement, en effet, est résolue avec quelques années de différence selon que les opérations à grouper portent sur un matériel manipulable ou non. Du point de vue psychologique, ces problèmes qui peuvent au premier abord sembler identiques sont en réalité bien différents les uns des autres. Ce n'est pas la solution, comme telle, d'un problème, qui se répète, ce n'est même pas la méthode qui permet d'y aboutir, c'est simplement un fonctionnement analogue mais avec de tout autres structures. Lorsque les enfants de 7 à 8 ans résolvent le problème des bâtonnets (opérations de sériation, p. 114), ils raisonnent sur des objets, tandis qu'ils échouent à l'épreuve de Burt parce qu'on leur demande de composer entre elles des propositions et comme le dit Piaget, entre les propositions et l'objet il y a, psychologiquement, toute la différence qui sépare l'« assumption » de la croyance à base de perceptions.

Il en va de même pour la règle des signes. Les expériences que nous avons décrites dans la Troisième partie de ce travail et qui, toutes, utilisent un matériel manipulable, sont résolues dès l'âge de 7 ou 8 ans, sauf naturellement lorsqu'elles font intervenir des dispositifs trop complexes. Les faits ont ainsi vérifié notre hypothèse selon laquelle le mécanisme que fait intervenir la règle des signes est concret et non pas formel.

Qu'elles utilisent les signes propres ou opératoires, nos expériences ne font pas appel à deux processus différents ou à un groupe de quatre transformations, mais à un seul et même processus de réversibilité. Groscurin que nous citons en annexe ², remarque en effet qu'on peut changer l'ordre des facteurs et qu'il n'y a plus lieu de distinguer entre signes de sens et signes d'opération.

Cependant celles de nos expériences qui portent sur de pures questions verbales, telles que nous les décrirons dans cette Quatrième partie, ne

¹ Edith est plus brune que Lily et en même temps elle est plus blonde que Suzanne.

² Voir p. 234.

sont saisies que par les enfants de 11 à 12 ans. Du point de vue pédagogique, cette constatation est d'importance. Nos résultats expérimentaux confirment les jugements que nous avons portés dans la Première partie de ce travail sur les théories de la règle des signes que nous avons classées, on s'en souvient, selon leur méthode d'explication, verbale, intuitive et active.

Cette Quatrième partie comprend deux sortes d'expériences sur le plan logique : les premières d'entre elles ne font intervenir que des signes plus, tandis que les secondes font intervenir des signes plus et des signes moins. Ces expériences ne font ainsi généralement appel qu'à une espèce de signes. Les recherches du groupe *a)* donnent, sur le plan verbal, le parallèle de la règle mathématique : un nombre pair d'inversions ou de signes négatifs donnent un résultat positif, un nombre impair un résultat négatif. Il s'agit au total de deux expériences faisant intervenir les termes d'inversion et de contraire.

GROUPE *a)*. 1. L'INVERSION

L'inversion jouant un rôle fondamental dans la règle des signes, nous avons jugé nécessaire de faire quelques investigations à propos de ce terme lui-même.

Technique

Nous avons posé les sept questions suivantes :

1. Donner la définition d'inversion.
2. Citer des exemples d'inversion.
3. Donner des synonymes d'inversion.
4. Expliquer ce que peut bien vouloir dire l'expression : « l'inversion d'une inversion ».
5. Donner des exemples « d'inversion d'inversion ».
6. Répondre à la question : Qu'est-ce que le contraire de l'inversion ?
7. Représentation graphique (d'exemples d'inversions et d'exemples d'inversion d'une inversion).

Résultats

Ces questions ont été présentées aux sujets dans l'ordre que nous venons d'indiquer. Elles n'ont pas toujours été bien différenciées par eux. Lorsque nous leur demandions des exemples, ils nous donnaient des définitions, etc.

Nous avons examiné des sujets de 10 à 14 ans. Les définitions sont bonnes, les sujets donnent beaucoup d'exemples et aussi en général des représentations graphiques. Nos résultats montrent ainsi que la plupart des sujets du stade formel ont une bonne notion de l'inversion ; souvent

ils pensent aux inversions de sens. Il leur semble qu'un certain sens est « normal », correspond à la « bonne marche des choses ». Ils savent aussi nous dire qu'il s'agit toujours de deux sens, ou de deux objets dont l'un peut être mis à la place de l'autre.

<i>Age</i>	<i>Réussites</i>	<i>Nombre de sujets</i>
10-11	2	5
11-12	3	4
12-13	5	6
13-14	9	9
		24 Total

Presque tous nos sujets ont compris ce que peut être l'inversion d'une inversion; voici les questions qui donnent lieu à quelques remarques intéressantes :

1. Un sujet déclare qu'« il ne voit pas ce que c'est », puis il donne tout de même une définition : « embrouillé », « tout embrouillé » puis un exemple : le mot pain qu'il avait écrit « niap », pour montrer ce qu'est une inversion. Cette fois-ci, pour montrer ce qu'est une inversion d'une inversion, il l'écrit en mêlant les lettres et en disant : « Je mets le a d'abord, le i n'importe où, etc. » Ce sujet montre ainsi qu'il n'a pas compris que deux inversions redonnent l'ordre de départ.

2. Quelques sujets nous ont donné les définitions : « le bon sens » « comme ça devrait être normalement », « la bonne marche des choses », « la place exacte », « le normal », « quelque chose remis dans l'ordre » « où ce devrait être ». Ce genre de réponses n'est donné qu'aux questions 4 et 6, soit à l'inversion d'inversion et au contraire d'inversion. C'est donc lorsqu'un deuxième sens négatif intervient que le sujet est obligé de qualifier le sens positif. Il n'est pas difficile de comprendre pourquoi c'est le sens positif que le sujet qualifie de bon sens ou de sens normal : c'est que ce sens correspond au sens des nombres absolus qui sont familiers à l'enfant.

3. L'inversion d'inversion donne lieu à une remarque intéressante : pour la plupart de nos sujets elle consiste à exécuter une action dans les deux sens, tandis que pour quelques-uns d'entre eux seulement, elle revient à laisser la chose à sa place. Le sujet s'exprime alors ainsi : « cela reste au même » ou « il n'y a aucun changement ».

4. Si tous les autres problèmes que fait intervenir cette expérience concernent des inversions ou des additions d'inversions, cette question porte sur une multiplication de termes représentant des signes négatifs. Il s'agit en effet de deux espèces différentes de signes, à savoir des signes propres et des signes opératoires, les uns représentés par le contraire et les autres par l'inversion. Nous constatons cependant que les résultats

de cette question sont identiques à ceux des questions qui portent sur des additions de signes.

Résumons maintenant les résultats de nos sujets en disant que nous avons trouvé dans leurs réponses les trois formes suivantes d'inversions : des changements d'ordre, de sens ou de rotation. Nous avons employé ces formes aussi, dans nos expériences concrètes. Nos sujets ont donné également des définitions par le contraire, notion que nous avons utilisée dans nos recherches sur le plan formel; ils ont donné enfin un certain nombre de définitions se rapportant au domaine des mathématiques (multiplication d'une fraction par la fraction inverse) ainsi que des définitions grammaticales (inversion du sujet et du verbe, en français, latin ou allemand).

Protocole de l'un des sujets interrogés

1. Peux-tu me donner la définition de l'inversion ?

.....

2. Donne-moi des exemples d'inversion ?

1. *Par exemple quand on écrit étoile; pi on tourne les lettres : on met le e au commencement.*

2. *Quand on tourne quelque chose; par exemple quand on fait du calcul, on met un chiffre en haut au lieu de le mettre en bas!*

3. *Si on a deux feuilles, on en met une là et une là :*

1 2 $\rightarrow$ 2 1

3. Peux-tu me donner des synonymes d'inversion ?

1. *tourner,*

2. *changer de côté.*

4. Peux-tu m'expliquer ce que pourrait bien vouloir dire l'expression « l'inversion d'une inversion » ?

.....

5. Peux-tu me donner des exemples d'inversion d'une inversion ?

1. *On fait comme ça, pi on repasse comme ça!*

1 2 $\rightarrow$ 2 1 $\rightarrow$ 1 2

2. *Si on a trois chiffres : 30*

30

30

On peut aussi faire avec deux; pi après, celui d'en bas vous le montez en haut :

30

30

Et avec deux chiffres différents ? 30

55

55 en haut

30 en bas

55, je le remets en bas.

6. Qu'est-ce donc que l'inversion d'inversion ?

C'est-à-dire que par exemple le 55, il revient à la même place où il est; pour les feuilles, je mets celle-ci, puis comme ça; elle retourne à sa place.

Et voici la seconde expérience :

2. LES CONTRAIRES

Technique

Nous posons à nos sujets deux questions portant sur trois différentes qualités ¹ :

1. Donner : a) le contraire de joli;
b) le contraire du contraire de joli.
2. Mêmes questions à propos de grand.
3. Mêmes questions à propos de mince.

Il faut attendre l'âge de 9 ans pour que les enfants comprennent de quoi il s'agit. A partir de cet âge-là et jusqu'au stade formel, les sujets nous ont souvent donné la réponse suivante : le contraire de joli, c'est « vilain » et le contraire du contraire de joli, c'est « très vilain ». Le problème n'est résolu qu'au stade formel, c'est-à-dire vers 11 ou 12 ans.

La seconde question que nous avons posée à propos de chacun de ces adjectifs, soit « le contraire du contraire » fait intervenir la forme qui, du point de vue mathématique, correspond à l'addition de deux quantités négatives. Cette forme est particulièrement intéressante à étudier puisqu'elle est cause du plus grand nombre d'erreurs.

Résultats

Les résultats de cette recherche mettent en évidence la construction de l'opération sur le plan formel. Jusqu'à 8 ou 9 ans, l'enfant ne montre aucune compréhension. Lorsqu'on lui pose la question portant sur le contraire du contraire, il ne sait pas répondre. A partir de 9 ans, les réponses de l'enfant montrent qu'il saisit les questions qu'on lui pose et que la construction de l'opération sur le plan formel commence. Il n'est cependant pas encore capable de réversibilité, tout au moins sur ce plan-là. Les réponses que nous avons citées plus haut (le contraire du contraire de joli, c'est très vilain) montrent que l'enfant continue dans la première direction qu'il a prise, alors qu'au second terme, il devrait faire demi-tour, puis retourner au point de départ. Il sait se placer au point de vue de joli pour en donner le contraire, mais il est incapable ensuite de se situer au point de vue du contraire de joli. Il reste figé dans sa position première, exactement comme les petits du stade représentatif

¹ Cette question fait partie d'un test de Rey.

préopératoire qui n'arrivent pas par eux-mêmes à prendre un second point de vue et à coordonner les deux. Nous avons vu qu'à partir de 12 ans, l'enfant donne des réponses correctes, caractérisées par la réversibilité qu'elles font intervenir.

<i>Age</i>	<i>Réussites</i>	<i>Nombre de sujets</i>
8- 9	0	10
9-10	2	10
10-11	2	10
11-12	6	10
12-13	9	11
		51 Total

GROUPE b)

Ces expériences présentent un avantage sur le groupe d'expériences précédent : elles contiennent les quatre formes correspondant à la règle des signes :

Voici la première d'entre elles :

1. LES AMIS ET LES ENNEMIS

L'inconvénient de cette recherche est qu'elle touche au domaine affectif; les degrés d'amitié que l'on peut envisager sont divers et ces termes évoquent immédiatement des souvenirs ou des expériences personnels. Pour parer à cette difficulté, nous avons fait intervenir deux camps, selon la technique suivante :

Technique

Pour introduire le sujet, nous disons à l'enfant : « Imagine-toi que tu joues avec tes camarades. Vous vous divisez en deux camps, pour jouer au ballon, par exemple. Dans l'un des camps se trouvent tes ennemis et dans l'autre tes amis et toi-même. Je vais maintenant te poser quelques questions au sujet de tes amis et de tes ennemis. » S'il le faut, nous insistons sur le fait que les amis sont d'un côté et les ennemis de l'autre, afin que l'enfant ne fasse aucune confusion à ce sujet. Voici ces questions :

1. Que sont pour toi les amis de tes amis ? Est-ce que ce sont tes amis ou tes ennemis ?
2. Même question à propos des ennemis des ennemis.
3. Même question à propos des amis des ennemis.
4. Même question à propos des ennemis des amis.

Nous nous sommes concentrée sur la ou les questions qui sont plus particulièrement causes d'erreurs ou d'hésitations. C'est la question 2 qui est la plus difficilement résolue.

Résultats

Le problème est résolu vers 11-12 ans. On trouve avant le stade formel des réponses semblables à celles que nous avons signalées à propos des contraires, telles que : « des très grands ennemis ». On trouve aussi des réponses telles que « copains » ou « camarades », réponses qui varient selon le point de vue affectif auquel se place le sujet. Ces réponses ne correspondent pas exactement aux résultats que donne la règle des signes, puisque le point d'arrivée n'est pas identique au point de départ. Ces déficiences concernent donc de nouveau la forme de la règle des signes « moins par moins donne plus ».

Age	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	
Réussites	0	0	3	8	7	6	
Nombre de sujets	10	7	10	10	10	9	Total des sujets : 56

La complexité que nous rencontrons ici n'existe pas sur le plan mathématique; aussi devons-nous constater qu'avec ces exemples logiques, nous introduisons des facteurs étrangers à la règle des signes proprement dite.

Il convient de souligner ici les difficultés impliquées par les méthodes pédagogiques verbales. Les problèmes que les méthodes expérimentales exposent d'une façon naturelle ne peuvent pas, par le langage, être exprimés d'une manière entièrement satisfaisante. Il est en effet impossible de traduire exactement les opérations mathématiques sur le plan verbal. Le langage le plus judicieusement choisi même ne parvient pas à exprimer ce que les faits, l'expérience, donnent d'une façon directe et toute simple. Pourtant de nombreux professeurs utilisent cette méthode : l'illustration de la règle des signes par les amis et les ennemis, par exemple, est actuellement en usage dans les écoles supérieures de Genève.

Si nous voulons mettre cette expérience sous une forme correspondant à la règle des signes complète, nous obtenons le tableau ci-dessous.

Comme le terme qui correspond à une inversion est l'ennemi, nous le considérerons comme le terme négatif, tandis que le terme d'ami peut être considéré comme positif.

1. L'ami de mon ami est mon ami (correspond à $+. + = +$).
2. L'ennemi de mon ennemi est mon ami (correspond à $- . - = +$).
3. L'ami de mon ennemi est mon ennemi (correspond à $+. - = -$).
4. L'ennemi de mon ami est mon ennemi (correspond à $- . + = -$).

Protocole de l'un des sujets interrogés

Suppose que vous soyez nombreux à faire un jeu. Vous êtes répartis en deux camps : d'un côté tes amis et toi, et de l'autre tes ennemis.

1. Què sont pour toi, les amis de tes amis ?

Mes amis, comme nous sommes des amis, mes amis ont aussi des amis mais c'est des amis aussi pour moi.

2. Que sont pour toi les ennemis de tes ennemis ?

Mes amis, parce que nos ennemis, ils auraient des amis ennemis pour nous. Si c'est des ennemis, c'est des amis pour nous...

Oui, si c'est des ennemis, c'est des amis pour nous.

3. Que sont pour toi les amis de tes ennemis ?

Mes ennemis parce que nos ennemis, ils ont forcément des amis ennemis pour nous.

4. Que sont pour toi les ennemis de tes amis ?

Mes ennemis, parce que nos amis comme ils sont du même camp que moi, les ennemis c'est les ennemis pour moi.

2. LES NÉGATIONS

Les négations, aussi bien que les inversions ou les contraires, se comportent d'une façon semblable aux signes dans la règle des signes : une négation nie le fait, deux négations l'affirment ou équivalent à une affirmation. En faisant intervenir aussi des affirmations, il est facile de donner sur le plan verbal, l'équivalent de la règle des signes.

Technique

Nous avons donné à nos sujets deux séries de phrases que nous avons introduites en ces termes :

« Voici quelques phrases. Il se peut qu'elles correspondent à ce qui s'est passé, mais il se peut aussi que tel ne soit pas le cas. Si en réalité les choses se sont bien passées comme je le dis, tu me diras : « juste », sinon tu me diras : « faux ». (L'expérimentateur énumère les phrases en question les unes à la suite des autres afin que le sujet puisse répondre au fur et à mesure.)

1. Je crois que tu as dîné aujourd'hui.
2. Je crois que tu n'as pas dîné aujourd'hui.
3. Je ne crois pas que tu as dîné aujourd'hui.
4. Je ne crois pas que tu n'as pas dîné aujourd'hui.

Et la seconde série de ces questions :

1. Je crois que tu es venu à l'école ce matin.
2. Je crois que tu n'es pas venu à l'école ce matin.
3. Je ne crois pas que tu es venu à l'école ce matin.
4. Je ne crois pas que tu n'es pas venu à l'école ce matin.

Comme d'habitude, nous avons centré notre interrogatoire sur les questions difficiles, soit en particulier sur la question 4 qui fait intervenir une double négation.

Résultats

Jusqu'au stade formel, les erreurs sont assez fréquentes.

<i>Age</i>	<i>Réussites</i>	<i>Nombre de sujets</i>
8- 9	0	3
11-12	0	3
12-13	3	4
13-14	4	5
		15 Total

3. LES ORDRES

En interrogeant nos sujets, il nous semblait que des négations placées dans des ordres seraient plus facilement comprises par eux. C'est donc avec cette hypothèse que nous avons commencé notre recherche.

Technique

Nous disons à nos sujets d'obéir strictement aux ordres que nous leur donnons, afin de nous rendre compte par leurs gestes s'ils ont compris ces ordres. Voici les deux séries d'ordres en question :

1. Je veux que tu poses la trousse sur la table.
2. Je ne veux pas que tu poses la trousse sur la table.
3. Je veux que tu ne poses pas la trousse sur la table.
4. Je ne veux pas que tu ne poses pas la trousse sur la table.

Et la seconde série de questions :

1. Je veux que tu te lèves.
2. Je ne veux pas que tu te lèves.
3. Je veux que tu ne te lèves pas.
4. Je ne veux pas que tu ne te lèves pas.

Nous devons insister toujours sur la quatrième forme qui est la plus difficile.

Résultats

D'une façon générale, ils n'ont pas vérifié notre hypothèse : la double négation incluse dans un ordre n'est pas comprise plus tôt par nos sujets, ou du moins ne l'est qu'exceptionnellement. Les ordres comportant des jeux de négations ne sont compris qu'à partir de 12 ans.

<i>Age</i>	<i>Réussites</i>	<i>Nombre de sujets</i>
8- 9	0	3
11-12	3	5
12-13	3	4
13-14	5	6
		18 Total

Ces expériences, qui portent, comme on vient de le voir, uniquement sur les signes sous les quatre formes de la règle de signes, ne sont résolues qu'à 11 ou 12 ans. Aucune de nos expériences présentées sur le plan logique seulement, sans dispositif, n'a été résolue avant le stade formel.

Il en a été de même lors de nos expériences verbales sur une suite d'inversions.

Du point de vue pédagogique, nous constatons que la règle des signes présentée sous une forme verbale est acquise beaucoup plus tardivement que la même règle présentée sous une forme concrète et convenablement structurée.

Rappelons cependant que le stade des opérations formelles n'est pas essentiellement caractérisé par le verbalisme. S'il est intéressant de voir à partir de quel âge la règle des signes présentée sous forme logique est comprise et si nos résultats montrent que ce n'est qu'à partir du stade formel, il serait absolument faux d'en déduire qu'à partir de 11 ou 12 ans la pensée de l'enfant est verbale. Comme nous ne cessons de le souligner, ce sont les opérations, les groupes et les groupements qui caractérisent le développement de l'intelligence.

En quoi ces recherches diffèrent-elles de celles qui sont résolues sur le plan concret ? Ces expériences ne sont accompagnées d'aucun dispositif. L'enfant non seulement ne peut pas jouer et manipuler, mais il ne voit même pas l'expérimentateur agir, comme c'était le cas pour les perles ou la voiture par exemple. Cette fois-ci l'expérimentateur ne présente que des idées au sujet. Celui-ci ne peut plus raisonner sur de la réalité, sur du concret ; il est donc bien obligé de raisonner sur des propositions.

L'enfant, dans l'expérience sur les amis et les ennemis, par exemple, doit, il est vrai, s'imaginer deux camps, des joueurs opposés les uns aux autres, mais il ne s'agit pas de raisonner sur ces amis ou ennemis concrets,

mais sur les propositions qu'expriment ces relations. Nous sommes dans le domaine de la pensée, indépendante de l'action. Or, comme l'a constaté Piaget, une action effectuée sur les signes que sont les mots détachés du réel, est toute différente d'une action portant sur la réalité ou sur les signes attachés à cette réalité. L'opération formelle est plus générale.

Ce groupe d'expériences a mis en évidence le fait que, des quatre formes de la règle des signes, la plus difficile est la double négation, le contraire du contraire ou l'inversion de l'inversion, c'est-à-dire la forme qui, sur le plan mathématique, correspond à l'addition ou à la multiplication de deux quantités négatives.

Piaget remarque d'autre part que les opérations du stade concret ne forment pas encore une logique formelle qui pourrait s'appliquer à toutes les notions et à tous les raisonnements. Ce fait a été vérifié aussi par nos résultats : les opérations que ces recherches font intervenir ne sont accessibles ou possibles pour les enfants de ce stade qu'à la condition seulement qu'ils puissent en même temps manipuler des objets. Ils ne peuvent pas encore raisonner sur de simples propositions verbales : témoin nos recherches sur la logique, non accompagnées de matériel, lesquelles ne sont résolues que sur le plan formel, soit à 11-12 ans. Il convient d'ajouter qu'il ne suffit pas qu'une expérience soit concrète pour être résolue au stade concret ; encore faut-il que les notions qu'elle suppose ne dépassent pas un certain degré de complexité. Nous avons donné, à ce propos, dans la description de nos expériences, quelques exemples d'opérations concrètes qui ne sont résolues qu'au stade formel. (Voir Troisième partie : Expériences préliminaires : 1. Les poulies, p. 138 et 2. Les miroirs, p. 139.)

Remarquons enfin à propos des expériences logiques qui sont résolues à partir du niveau formel, que ces résultats nous montrent que le sujet est capable de raisonner sur des propositions, sans que celles-ci soient accompagnées de dispositif.

Nous pouvons rapprocher de cette constatation ce que dit Piaget, à savoir que les sujets à partir de 11-12 ans sont capables de raisonner sans relation nécessaire avec la réalité et de se fier à la nécessité du raisonnement lui-même. Le contenu de ces opérations est le même : il s'agit toujours de classer, sérier, dénombrer, mesurer, placer ou déplacer dans l'espace ou dans le temps. Mais ce ne sont pas les faits qui sont groupés en tant que structuration de l'action ou de la réalité, mais les propositions qui expriment ou réfléchissent ces opérations. Les opérations formelles sont donc faites surtout d'implications et d'incompatibilités entre propositions qui elles-mêmes impliquent des classifications, des sériations, etc.

Bien que le contenu des opérations du stade formel soit le même que celui des opérations du stade concret, la constitution de ces opérations qui débute vers 11-12 ans, nécessite, d'après Piaget, toute une nouvelle

construction. Ces deux sortes d'opérations offrent donc, du point de vue psychologique, des difficultés très différentes l'une de l'autre. Il suffit de considérer nos résultats pour s'en rendre compte : tandis que nos expériences concrètes sont résolues vers 7-8 ans, celles de nos expériences qui ne sont pas accompagnées d'un matériel manipulable ne sont résolues que vers 11-12 ans. En somme, les sujets qui, d'après leur âge, se placent juste avant le stade formel, réagissent exactement comme les sujets se plaçant juste avant le stade concret. Les comportements sur le plan représentatif préopératoire et sur le plan concret sont ainsi semblables : le sujet de 8-9 à 11 ans raisonne sur le plan formel comme le petit de 5 à 7 ans sur le plan de l'action, et ce n'est qu'à 12 ans qu'il parvient, sur le plan formel, à la réversibilité qu'il réalisait à 7 ans déjà sur le plan concret.

Piaget souligne le fait qu'avec les opérations formelles c'est plus que la réalité qui est représentée, puisque l'univers du possible s'ouvre à la construction et que la pensée devient libre à l'égard du monde réel. A son avis la création mathématique est une illustration de ces opérations.

Nous irons ainsi jusqu'à dire à propos de la règle des signes et de sa compréhension par les enfants, qu'il faut enseigner cette règle en la plaçant dans un contexte d'opérations concrètes afin qu'elle prenne un sens aux yeux des élèves.

Quelles conclusions donner à ces expériences du stade formel, sinon qu'elles sont plutôt aptes à mettre la difficulté de la règle des signes en évidence (et tout particulièrement de la forme « moins par moins égale plus ») qu'à en éclairer la compréhension. Comme nous l'avons dit tout au long de cette Quatrième partie, elles font partie de la logique, et cette discipline est loin de comporter la précision des mathématiques. D'ailleurs, l'âge auquel elles sont résolues (11 ou 12 ans) est beaucoup trop tardif ! Si en effet, nous comparons d'un point de vue pédagogique, ces résultats avec ceux que nous avons obtenus, au même âge, avec nos deux expériences principales (voiture et balance), nous nous rendons bien compte qu'ils leur sont infiniment inférieurs. Ainsi, dans nos conclusions pédagogiques, nous ne pouvons que critiquer les maîtres qui n'emploient que de telles méthodes.

Passons maintenant à des expériences purement mathématiques. Toutefois, avant d'aborder l'exposé des expériences elles-mêmes, il convient de nous demander ce que sont au juste les mathématiques : sur quoi se fondent-elles, comment sont-elles construites, et quels sont enfin leurs rapports avec la réalité physique ? Nous verrons mieux ensuite les raisons qui nous ont amenée à proposer une propédeutique concrète, expérimentale.

II. EXPÉRIENCES MATHÉMATIQUES

Rapport avec la réalité physique

D'une part les mathématiques s'accordent avec la réalité physique. Il n'arrive jamais au physicien de trouver une structure dans le monde matériel qu'il ne puisse exprimer d'une façon précise dans le langage mathématique. Il arrive même que les schémas mathématiques anticipent, à des années de distance, sur le contenu expérimental qui viendra s'insérer en eux.

D'autre part, tout en correspondant toujours à un secteur de la réalité physique, les mathématiques la dépassent sans cesse par leurs généralisations.

Une proposition mathématique n'est pas vraie dans la mesure où elle s'accorde avec la réalité extérieure, mais dans la mesure où elle est rationnellement démontrée. C'est à partir d'un certain degré de leur développement surtout que les mathématiques ne se fondent plus sur l'expérience. Si les mathématiques élémentaires paraissent résulter d'actions parmi les autres : déplacements, réunions, etc., les mathématiques supérieures débordent de toutes parts les frontières de l'expérience réelle ou réalisable. A ce degré, la création mathématique est libre à l'égard du monde réel ; elle va au-delà.

Leur construction

Le raisonnement mathématique est une construction de l'esprit parce qu'il est formé d'opérations mentales composables entre elles. Ces compositions sont rigoureuses, parce qu'elles sont réglées de l'intérieur grâce à leur réversibilité (c'est-à-dire à la possibilité d'un retour aux éléments identiques). Cette construction revêt la nature d'un groupe dans lequel la composition associative est gage de fécondité. Au moyen d'opérations, partant de quelques axiomes peu nombreux et pauvres de contenu ainsi que de quelques définitions, le mathématicien élabore cet univers immense de relations que constituent les êtres dits mathématiques. Alors que dans tous les autres domaines de la science, la déduction pure n'engendre que chimères et que le progrès des connaissances suppose un appel continu à l'observation et à l'expérience, la déduction mathématique est au contraire extrêmement productive.

Le raisonnement mathématique est ainsi un exemple de généralisation féconde. Généraliser, dans ce cas, ne consiste plus seulement à dégager les éléments communs, mais encore à les différencier. S'il est vrai que ces notions générales étaient déjà contenues dans les notions particulières du début, elles ne se reconstruisent pas moins en s'en séparant et c'est

pourquoi la généralisation est alors féconde. Lorsque ces notions générales étaient encore indifférenciées, on ne remarquait pas leur existence : nouvelle preuve que la prise de conscience qui entraîne la différenciation est une vraie construction.

Ainsi, les éléments abstraits des actions ou opérations antérieures, rendus indépendants (ou différenciés) par cette abstraction, donnent lieu à une nouvelle composition opératoire d'ensemble, distincte de la composition antérieure dont ils faisaient partie. Un seul élément abstrait d'un système antérieur ne saurait donner lieu à l'élaboration d'un système nouveau. C'est par combinaison ou mise en relation avec d'autres éléments, abstraits d'autres ensembles, qu'il engendre la composition non contenue dans les précédentes. Mais cette combinaison entre éléments abstraits des systèmes antérieurs ne consiste pas en une simple association ; la synthèse ne s'effectue et n'est réellement constructive que dans la mesure où ces éléments donnent lieu à une composition opératoire entière, avec ses propriétés d'ensemble : de transitivité, de réversibilité, d'associativité et d'identité. Ces propriétés attestent l'indépendance et le caractère fermé de la nouvelle construction.

Leur fondement

Les mathématiques, comme la logique, ne se fondent sur rien d'autre que sur elles-mêmes ; leur critère de nécessité est interne, c'est la réversibilité de leurs opérations. L'activité opératoire du sujet semble seule en jeu. Les êtres mathématiques ne résultent pas d'une abstraction à partir d'objets ou de qualités extraites de ces objets, mais d'une abstraction effectuée au sein des actions comme telles. Piaget parle de deux sortes d'abstraction, l'une relative aux opérations du sujet et l'autre relative à l'objet. C'est la première seule qui entre en jeu systématiquement en mathématique, à titre de stimulant à un renouvellement de la première.

Mais si les mathématiques sont ainsi le produit de l'activité du sujet, on ne peut pas dire que l'objet n'y joue aucun rôle, ce qui reviendrait à soutenir que les mathématiques constituent une assimilation sans accommodation, c'est-à-dire une incorporation de l'objet au sujet sans action réciproque de l'objet sur le sujet. Or l'organisme est lié à la réalité physique par sa nature interne et non seulement par voie d'échange externe. Le rapport que le sujet entretient avec le réel émane des relations mêmes de l'organisation vivante avec les structures physico-chimiques.

Il n'en subsiste pas moins que la pensée mathématique, construite par pure composition opératoire, jamais contredite par le réel et ne rencontrant d'autre résistance que son « objectivité intrinsèque », dépasse la réalité au lieu d'être tirée de l'expérience physique. Elle aboutit donc à expliquer l'objet par la structure opératoire du sujet.

Ce caractère des mathématiques explique sans doute que les maîtres chargés d'enseigner cette science dans les écoles soient peu portés à appuyer leur enseignement sur des exemples concrets. Or si les mathématiques prennent cette forme abstraite dans un esprit arrivé à son complet développement, il n'en est pas de même aux différents stades de ce développement. Même pour une règle aussi formelle que la règle des signes, nos expériences ont montré, comme l'avaient fait prévoir les travaux de Piaget, que le raisonnement en cette matière ne se dégage que peu à peu de la réalité concrète.

Il nous a semblé utile de procéder à une sorte de contre-épreuve, au terme de nos recherches, en opérant quelques sondages auprès d'enfants du stade formel auxquels on enseigne dans les écoles la règle des signes. Nous étions désireuse de nous rendre compte ainsi du degré de compréhension de la règle des signes chez des enfants qui n'avaient pas été amenés à cette compréhension par des exercices concrets au cours des stades précédents. Il convient aussitôt d'ajouter que certains maîtres particulièrement avertis de la psychologie enfantine ont recours dans leur enseignement à ces illustrations concrètes de la règle qui en facilitent considérablement la compréhension.

Voici des recherches sur la règle des signes elle-même : tout d'abord une série d'exercices algébriques très simples; puis une explication de la règle des signes par des élèves; ensuite une série d'exercices algébriques plus difficiles.

Il convient de remarquer que, pour ce groupe d'expériences qui s'appliquaient à des élèves du degré secondaire, nous ne pouvions disposer que d'un nombre restreint de sujets. Les directeurs ou professeurs de ces écoles ont bien voulu nous indiquer des élèves choisis dans la moitié supérieure de chaque classe. Il convenait en effet, pour une recherche sur une question dont la compréhension est regardée comme difficile (et du moment que les sujets disponibles étaient peu nombreux), de ne s'adresser qu'aux meilleurs éléments.

1. EXPÉRIENCES ALGÈBRIQUES. FEUILLE I

Voici les trois exercices que nous avons présentés à nos sujets :

Les résultats de ces exercices sont :

1.	$(-3) \cdot (+2) \cdot (-4) \cdot (-5)$	=	— 120
2.	$(-1) \cdot 5$	=	— 5
3.	$(+3) \cdot (+4)$	=	+ 12
	$(+3) \cdot (-4)$	=	— 12
	$(-3) \cdot (+4)$	=	— 12
	$(-3) \cdot (-4)$	=	+ 12

Résultats

Nous avons examiné quinze élèves de 13 à 15 ans, et obtenu un nombre de quatre fautes au total. Deux de ces fautes sont des fautes de signes, tandis que les deux autres sont dues au fait que l'élève a transformé la multiplication en addition. Voici la répartition de ces fautes selon les trois questions qui ont été posées :

La question 1 a provoqué trois fautes : une faute de signe et deux fautes dues au fait que la multiplication a été transformée en addition.

La question 2 n'a pas provoqué d'erreurs.

La question 3 a provoqué une faute de signes pour la formule (3) . (—4) =

Ces résultats sont intéressants du fait qu'ils montrent que ces élèves se sont trompés tout autant en confondant addition et multiplication qu'en omettant d'appliquer la règle des signes (ou en l'appliquant incorrectement).

La conclusion essentielle de cette recherche est la suivante : La règle des signes présentée dans sa plus simple expression, accompagnée de petits coefficients numériques, est très correctement appliquée.

2. EXPLICATION DE LA RÈGLE DES SIGNES

Après avoir fait exécuter aux sujets les exercices algébriques que nous venons de décrire, nous leur demandons l'explication de la règle des signes. Il s'agit donc des mêmes enfants pour les exercices algébriques de la feuille 1 et pour l'explication de la règle des signes.

Voici les quatre questions que nous leur posons. Nous leur demandons :

- 1) l'explication, définition ou démonstration de la règle des signes;
- 2) des exemples ou une explication;
- 3) une représentation graphique;
- 4) une réponse à l'expérimentateur qui est convaincu (il feint de l'être) que la multiplication d'une quantité négative par une quantité négative donne un résultat négatif, ainsi qu'une justification de cette réponse.

Résultats

Comme nous le disons plus haut, nous avons interrogé quinze sujets. Ces sujets ont été pris à l'Ecole supérieure des jeunes filles et au Collège classique.

Nous avons interrogé en outre cinq sujets du Technicum (ou Collège moderne) qui n'avaient pas passé les expériences sur les exercices algébriques. Nous donnons ici successivement les résultats des uns et des autres :

1. Ecole supérieure des jeunes filles : six sujets.

Question 1. Une élève s'est toujours demandé pourquoi la règle des signes était telle qu'on la lui avait enseignée. Une autre se pose la même question au cours de notre interrogatoire, c'est-à-dire qu'elle en vient à se poser le pourquoi de cette règle, et qu'elle nous en demande la démonstration. Trois autres élèves pensent avoir oublié la démonstration et ne sont pas du tout gênés par cet oubli. La sixième élève enfin estime « qu'apprendre les formules c'est déjà assez vivant comme ça ! » Aucune de ces élèves n'a donc pu nous donner une explication de la règle des signes.

Question 2. Il est intéressant de constater que les deux premières élèves dont nous avons parlé à la question 1 et qui manifestaient le désir de connaître le pourquoi de la règle des signes ont été seules capables de citer un exemple. L'une des deux, celle dont l'intérêt pour la règle des signes semble s'être éveillé au cours de l'interrogatoire, donne l'exemple du thermomètre sans pouvoir toutefois aller plus loin que les nombres positifs et négatifs et sans songer par conséquent aux opérations algébriques. L'autre élève, qui s'est toujours demandé quelle était la raison d'être de la règle des signes, donne l'exemple de trois bouteilles à moitié pleines, ce qui fait un litre et demi... sans pouvoir aller plus loin dans son explication.

Question 3. Une seule représentation graphique, donnée par l'élève dont la curiosité augmentait au cours de l'interrogatoire : une droite, une origine. L'élève déclare que ce dessin « ne convient pas, car moins multiplié par moins donnerait moins ! ».

Question 4. Cinq de nos sujets nous ont simplement répondu : « non, c'est la règle ! ». Si nous leur demandons pourquoi, elles ne savent que nous répondre « parce que c'est ainsi, c'est la règle ! ». Seule l'élève qui a su faire un dessin, essaie de s'y rapporter pour nous donner une explication, mais en vain; elle est incapable de donner une démonstration.

2. Collège Classique : 9 sujets.

Question 1. Trois sujets déclarent que la règle des signes n'est pas compliquée; il ne s'agit que de la savoir.

Trois sujets ont compris l'addition et la soustraction, mais constatent qu'ils ne peuvent pas expliquer la multiplication. L'un essaie de distinguer un signe moins devant une parenthèse mais il ne sait plus de quoi il faut le distinguer et finit par dire qu'il a oublié la multiplication. Un autre élève voit 4 unités négatives répétées mais déclare que 4 fois une unité négative ne donnerait pas le signe plus. (Exemple : $- . - = +$). Le troisième de ces élèves va plus loin; il voit l'équivalence, qu'il formule ainsi : « Quant on enlève ce qui est en moins, c'est comme si

on ajoute la même chose en plus. Ça change, ça fait le contraire. » Il va même jusqu'à ajouter : « Quand on multiplie, c'est comme si on additionne autant de fois », puis il s'arrête, ne voyant plus comment continuer.

Trois autres sujets passent par l'explication des sens. Le premier dit que moins un par moins un, donne zéro. Il lui est tout à fait impossible de passer à droite de l'origine. Il s'explique ainsi : « moins un va dans ce sens : $\leftarrow$ (je m'embrouille là-dedans), ensuite dans ce sens : $\rightarrow$ ça fait zéro » (selon ce schéma).

Le second sujet nous fait remarquer que le sens négatif est le contraire du sens positif, d'où il déduit directement que deux sens négatifs sont un sens positif mais lorsqu'il s'agit de songer à des qualités, ce sujet ne s'en sort pas ; il remarque simplement qu'« il s'agit d'une multiplication... que l'addition et la soustraction c'est tout simple » et s'arrête, ne sachant pas comment continuer.

Le troisième sujet, enfin, voit qu'il y a dans la multiplication d'un nombre négatif par un nombre négatif, deux changements de sens et qu'ainsi on retombe dans le sens positif. Mais il ne sait pas pourquoi le résultat est alors positif ni comment fonctionne la règle des signes d'une façon générale ; il ne peut que rappeler cette règle.

Question 2. Quatre sujets n'ont pas donné de réponse. Cinq sujets ont donné l'exemple des amis et des ennemis dont aucun d'entre eux ne se sert dans ses exercices algébriques. Cet exemple est considéré par eux comme un moyen pouvant aider les élèves dont la mémoire est faible. Cet exemple leur a été donné en classe. Aucun de ces neuf sujets du Collège classique n'a su nous donner un exemple original.

Question 3. Quatre sujets n'ont pas fait de croquis. Trois sujets l'ont essayé en traçant une droite, une origine et quelques unités mais sans arriver à une démonstration quelconque. Deux sujets enfin (parmi les trois qui avaient commencé une démonstration par les sens) ont fait un bon croquis mais qui ne fait que mettre encore en évidence leur incapacité à expliquer la règle des signes, en particulier la multiplication d'une quantité négative par une quantité négative.

Question 4. Cette question n'a été posée qu'à cinq sujets. Trois d'entre eux ne savent pas trop comment la réfuter. Un sujet répond en se contentant de donner le tableau de la règle des signes qu'il a appris par cœur ; le cinquième sujet enfin renvoie à la règle des signes elle-même ainsi qu'à son explication, qu'il juge bonne (il s'agit d'une démonstration par les sens que nous avons signalée comme dernière réponse à la première question).

En conclusion de ces deux expériences, l'une portant sur des exercices algébriques et l'autre sur l'explication de la règle des signes proposée aux mêmes sujets, nous constatons qu'il est possible de résoudre

de petits exercices algébriques sur la règle des signes, alors qu'on ne comprend rien à la règle elle-même.

3. Collège moderne : cinq sujets.

Etant donné l'intérêt qu'ont présenté ces expériences, nous croyons utile d'en résumer les protocoles :

PROTOCOLES DE CINQ SUJETS INTERROGÉS

I. JUL., 16 ans :

« Moins fois moins = plus. Ainsi $-3 \cdot -5 = +15$ parce que l'on soustrait une quantité négative, c'est comme si on l'additionne ou parce que deux fois le signe moins est égal au signe plus. On m'a expliqué pourquoi; on l'a appris et on me l'a demandé plusieurs fois, mais maintenant je ne m'en souviens plus.

» Voyons voir : Un produit de deux signes contraires est négatif; un produit de deux signes de même sens est positif. On m'a expliqué ça avec un dessin : On a une ligne, un trait qui signifie le zéro et une locomotive. La locomotive est à $+3$. Pour 3 fois $+5$, la locomotive avancera 5 fois la valeur de 3 dans le sens positif et arrivera ainsi à $+15$.

» Si on fait 3 fois -5 elle avance de 3 fois mais dans le sens négatif. Ça donnera -15 .

» Si on a moins 3 fois -5 , comme on est déjà dans le sens négatif, en multipliant par un nombre négatif, ça remontera dans le sens positif : -3 fois -5 , ça fera $+15$.

» Puis c'est tout ce que l'on peut avoir : -3 fois $+5 = -15$. Deux mêmes signes donnent un résultat positif. Une quantité qui a déjà le signe $-$, on ne peut pas la soustraire; ou plutôt on peut mais alors elle change de signe.

» La locomotive est tournée vers le signe moins; elle est à -3 . Quand elle va vers le signe plus, elle est tournée du côté du signe où elle doit aller. Quand c'est le signe moins elle doit reculer. Si on a -3 fois -5 , comme c'est dans le signe $-$, elle devra reculer et remontera dans le signe $+$; elle devra reculer de 5 fois -3 ; comme elle est à -3 , elle doit reculer de 5 fois 3, alors ça donnera $+15$. »

II. ANT., 16 ans :

« C'est la règle qui dit qu'on peut changer les signes en algèbre. Quand il y a deux signes moins, ça équivaut à un signe plus. Mon maître avait dessiné une locomotive sur une feuille de papier et l'avait découpée en mettant d'un côté un signe plus, de l'autre un signe moins. Au tableau, il avait fait un graphique, une ligne divisée en plusieurs parties et le zéro. Quand c'était un nombre positif, la locomotive était tournée du

côté positif; quand c'était un nombre négatif, du côté négatif. Elle tournait quand c'était moins. Le maître demandait ce qu'il y avait dans le livre et avançait ou reculait la locomotive sur le tableau. Si on a deux fois moins 10 on va une fois du côté positif et une deuxième fois en arrière.

» Si on a plus 7 et moins 2, on avançait dans le sens positif, on tournait la locomotive et on soustrayait 2. »

III. J. P., 15 ans.

L'élève énonce d'abord les quatre formes de la règle des signes :

$$- . - = + \quad + . + = + \quad + . - = - \quad - . + = -$$

Puis il commente :

« Quand on soustrait deux fois c'est comme si on additionne. On soustrait une fois et si on soustrait encore une fois, c'est comme si on additionne. On me l'a montré avec une locomotive. Si on tourne la locomotive elle fait marche arrière; si on tourne encore une fois, elle est de nouveau dans le même sens qu'avant.

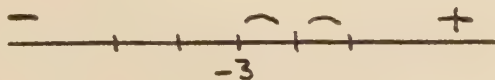
» Si on a $++ = +$, la locomotive ne change pas de sens; on additionne deux membres à la suite l'un de l'autre. Si c'est une multiplication c'est la même chose.

» Si on a moins par plus, on additionne une fois et ensuite on soustrait, dans le sens positif la première fois et dans le sens négatif la seconde fois. Si c'est une multiplication c'est la même chose.

» Si on a -3 fois $+2$ c'est la même chose. On fait 2 fois moins 3 parce qu'on va dans le sens négatif; le premier nombre, c'est le nombre de fois qu'il faut multiplier.

» Si on a -3 fois -2 c'est positif puisqu'on est dans le sens moins; on va dans le sens contraire, on additionne; ça va dans le sens positif.

» Je ne sais pas si ça marche avec un dessin. On fait deux fois cette longueur dans le sens contraire et on arrive ici, mais c'est pas tout à fait juste, parce qu'on devrait arriver à 6 et moi j'arrive à 3 seulement : On a -3 ici, on multiplie par 2, on fait $+3$ au lieu de $+6$! j'sais le faire mais j'sais pas l'expliquer.



» Si au lieu de tourner un matelas chaque jour une fois, on le tourne chaque jour deux fois, c'est comme si on faisait rien du tout.

» La locomotive, si on la tourne une fois, elle va en arrière; si on la tourne encore une fois elle va de nouveau en avant. Pour la multiplication ça va, mais j'sais pas le faire avec le dessin. »

IV. JEAN, 15 ans :

L'élève énonce d'abord les quatre formes de la règle des signes :

$$+ . + = + \quad - . + = - \quad + . - = - \quad - . - = +$$

Puis il explique :

« Deux signes moins s'annulent; ça forme le signe plus.

» Un $-$ et un $+$ le signe $-$ prédomine : $= -$.

» Un exemple : -3 fois $-5 = +15$.

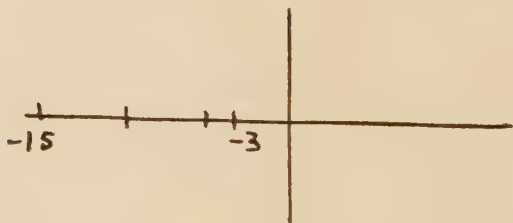
» Mais pourquoi, c'est le hic ! On a dû nous donner un exemple. J'me rappelle plus; j'saurais l'appliquer mais pas l'expliquer. -15 fois $-1 = +15$.

» On avait une ligne avec la séparation zéro; d'un côté moins, d'un côté plus. Le maître avait fait un dessin, avec une locomotive partant d'un côté $-$ et d'un côté $+$.

» Supposons que j'aie -3 fois 5 . J'ai -3 ; si je prends 5 fois une quantité je trouve le nombre de quantités. Disons que le moins veuille dire bouteille : 5 fois 3 bouteilles, ça revient à 15 bouteilles et j'ajoute le signe : c'est $-$. Ça me fait -15 . C'est la même chose pour 3 fois -5 : ça revient au même.

» En prenant comme exemple -3 fois -5 je retombe sur la loi, parce que si je prends 3 bouteilles fois 5 bouteilles, ça me ferait des bouteilles carrées, ce n'est pas compréhensible.

» Avec la locomotive, elle doit aller en arrière ça doit faire un saut de 30 pour arriver de -15 à $+15$. »



V. GEO., 16 ans :

L'élève pose les quatre formes de la règle des signes :

$$+ \text{ par } + = + \quad + \text{ par } - = - \quad - \text{ par } + = - \quad - \text{ par } - = +$$

Puis il déclare :

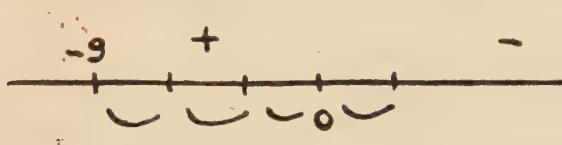
« Négatif par négatif doit donner positif. Moins une chose par moins une chose doit donner positif, mais j'sais pas comment expliquer.

» -3 multiplié par -3 c'est comme $+3$ par $+3$.

» Le maître nous a dit : c'est une règle; mais il nous a donné des exemples, mais je les ai oubliés.

» Ah ! c'était une locomotive; elle part à zéro, elle est arrivée à moins 3 kilomètres. Si on a -3 km fois -3 , la locomotive arrivée à -3 km elle tourne sur une voie de garage, elle change de signe et fait 9 km. Ça donne $+9$. On avait tout de suite compris avec l'exemple de la locomotive. Le maître avait dessiné d'un côté un signe $+$ de l'autre un signe $-$. La locomotive tournait sur une voie de garage, ça faisait le côté $+$ puis elle faisait 9 km.

» Elle part de -3 ; je devrais trouver 6, j'vois que je me suis trompé.



Je devrais rester au point 9 qui est ici; je me rappelle plus exactement où tournait le maître, où il faisait tourner sa locomotive de façon que ça change de signe. Il avait fait partir la locomotive de zéro; ensuite je ne me rappelle plus ce qu'il a fait; je ne me rappelle plus de quel côté il partait. La locomotive doit avoir une importance, parce que d'un côté elle a un signe $+$ d'un côté elle a un signe $-$. Elle doit arriver à $+9$. Comment on fait ? J'peux pas arriver à en sortir. A moins que dès le départ la locomotive change de signe, elle fait 3 km et change de signe ! à moins qu'elle change de signe à l'arrivée. Ça va plus ! On a changé de signe avec la locomotive à -3 .

Résumons les résultats de ces cinq sujets du Collège moderne : Trois d'entre eux expliquent correctement l'inversion de l'inversion, ou la forme de la règle des signes qui consiste à multiplier une quantité négative par une quantité négative. Ils sont gênés cependant lorsque nous leur demandons d'introduire des nombres dans leur explication; ils le sont davantage encore lorsque nous leur demandons une représentation graphique de cette multiplication avec signes et nombres.

Et pourtant tous les éléments qui leur permettraient une bonne représentation sont présents : l'inversion d'inversion est très claire pour eux; l'exemple de la locomotive et de ses doubles rotations sont bien saisies : une rotation au départ, afin que la locomotive soit tournée du côté du signe moins, et une rotation au cours du trajet pour représenter le second signe moins qui est équivalent à une seconde inversion ou rotation. La connaissance de la multiplication en tant qu'addition abrégée est aussi acquise par ces sujets mais ils ne savent pas comment combiner pratiquement inversion et multiplication.

EXERCICES ALGÈBRIQUES. FEUILLE II

Nous avons présenté une seconde série d'exercices aux élèves du niveau secondaire :

1. $3(2a + 3b - 4c) =$
2. Si $a = -4$, trouver la valeur de a^3
3. Si $a = -1$, $b = 3$, $c = -2$, trouver la valeur de $-3a^4bc^3$
4. $(4x^2 - 7y - 8a^3) 3xy^2 =$
5. $(-5ab^3x)(-ab^3x) =$
6. $(3a^2b)(-2a^3b^2)(-ab^4) =$
7. $(6a^3 - \frac{5}{3}a^2b - \frac{4}{5}ab^2)(-\frac{3}{3}ab^3) =$
8. $(x + 8)(x + 7) =$

Résultats de ces exercices :

1. $= 6a + 9b - 12c$
2. $a = -4$
 $a^3 = (-4)^3 = (-4) - (-4) \cdot (-4) = -64$
3. $a = -1$, $b = 3$, $c = -2$
 $-3a^4bc^3 = -3 \cdot (-1)^4 \cdot 3 \cdot (-2)^3$
 $= -3 \cdot (+1) \cdot 3 \cdot (-8)$
 $= 72$
4. $= 12x^3y^2 - 21xy^3 - 24xy^2m^3$
5. $= 5a^2b^6x^2$
6. $3a^2b - (-2a^3b^2) = -6a^5b^3$
 $(-6a^5b^3) \cdot (-ab^4) = 6a^6b^7$
7. $= -\frac{9}{2}a^4b^3 + \frac{5}{4}a^3b^3 + \frac{3}{5}a^2b^4$
8. $= x^2 + 8x + 7x + 56$
 $= x^2 + 15x + 56$

Résultats

Nous avons examiné treize élèves de l'Ecole supérieure des jeunes filles et du Collège classique, âgés de 13 et 15 ans. Nous décrivons les fautes qui ont été commises dans l'ordre où les exercices ont été présentés.

1. Zéro faute.
2. Huit fautes dont deux de signes, deux de calcul, deux de puissance, une faute double (calcul et puissance) et une de substitution.
3. Onze fautes dont cinq de signes, parmi lesquelles l'une est accompagnée d'une faute de calcul, trois de fautes de multiplication

(transformée en addition). Deux de ces dernières fautes sont encore accompagnées, l'une d'une faute de substitution, l'autre d'une faute de puissance.

A part ces cinq fautes de signes, nous avons quatre fautes provenant de la transformation d'une multiplication en addition. De ces cinq fautes, deux sont doubles; à l'une s'ajoute une faute de substitution et à l'autre une faute de puissance.

Le grand nombre de fautes dans cet exercice provient sans doute du fait qu'il s'agit ici de multiplications avec puissances et substitutions. D'autre part, c'est le seul exercice qui ne comporte pas de parenthèses. La moitié de nos sujets ont transformé la multiplication en addition et soustraction (sept sujets sur treize exactement). Même après avoir trouvé des résultats partiels corrects, les sujets les ont additionnés entre eux au lieu de les multiplier; d'où de nombreuses fautes de signes également.

Nous avons un exercice semblable sur la feuille 1 (N° 1) mais il comportait des parenthèses et de très simples coefficients numériques. Deux des sujets sur les quinze qui avaient alors été interrogés, avaient transformé la multiplication en addition.

Si maintenant nous additionnons toutes les erreurs commises, à propos de cette question 3, nous arrivons à la répartition suivante :

Multiplication transformée en addition : six.

Puissance : quatre.

Substitution : deux.

4. Une faute de puissance.

5. Une double faute : multiplication transformée en addition et faute de développement (soit une faute dans la multiplication des facteurs entre eux).

6. Deux fautes de puissance, une de calcul et deux de multiplications transformées en additions, fautes dont l'une est doublée d'une erreur dans le développement.

7. Trois fautes de signes, dont deux sont doubles. Une faute de multiplication transformée en addition et six fautes de fractions.

Nous avons donc ici autant de fautes de fractions que nous avons de fautes de multiplications transformées en additions dans l'exercice 3. C'est le seul de nos exercices qui comporte des fractions.

Deux de nos sujets ont fait une double faute de signes. Nous entendons par là qu'ils ont commis deux fautes successives : ces sujets ont oublié deux fois de suite de mettre le signe plus comme produit de deux signes négatifs.

8. Deux fautes de signes, dont l'une est double ou même triple, puisque le sujet donne dans son résultat trois signes moins au lieu de deux signes plus.

Le cas de ce dernier élève est intéressant. Nous le décrivons brièvement : il s'agit du sujet qui a commis le plus grand nombre d'erreurs au total, soit six sur huit questions. Il a commis des fautes de signes aussi, aux exercices 3 et 7. En faisant ce dernier exercice, il s'est exprimé ainsi : « J'obtiens $\times$ par 2, $\times$ par 7, plus, plus... je me souviens déjà plus de la règle des signes; plus par plus, moins... deux signes positifs, non ! (il plonge sa tête dans ses mains) deux mêmes signes égalent moins et deux signes différents plus. »

Ainsi ce sujet fait trois erreurs dans le développement de cet exercice qui comporte trois couples de signes moins. Il s'agit donc ici d'un oubli de la règle des signes, cas qui ne s'est produit qu'une fois d'une façon aussi évidente, dans tous nos interrogatoires sur la règle des signes.

Une autre faute a été commise par un autre sujet. Il s'agit de l'oubli de l'un des membres d'une opération.

Concluons : Il est évident (et ceci nous l'avons déjà constaté à propos des exercices de la feuille 1) que les exercices simples sont résolus à peu près sans erreur. Sur cette feuille 2, l'exercice 1 n'a été cause d'aucune erreur; les exercices 4 et 5 en ont causé une chacun. Nous pouvons donc dire qu'un contexte simple favorise une juste application de la règle des signes ¹.

Il faudrait, pour pouvoir réellement conclure, entreprendre toute une série de recherches avec de nombreux sujets. Il serait bon d'analyser et de délimiter exactement l'importance des facteurs parenthèses, puissances, substitutions, fractions, etc., recherches qui dépassent les limites de notre travail.

Nos résultats nous permettent de dire que l'erreur de signes la plus fréquemment commise est causée par le fait que les élèves confondent la multiplication et l'addition (ou soustraction).

Résumons-nous. Rappelons tout d'abord que c'est à partir de 13 ou 14 ans que l'on commence à donner l'enseignement de l'algèbre dans les écoles de Genève.

Notre première recherche a consisté en un interrogatoire sur la règle des signes. Nous avons demandé à nos sujets s'ils pouvaient nous l'expliquer, nous en donner un exemple ou une représentation. La plupart d'entre eux se sont avoués incapables d'expliquer la règle : les uns quelque peu gênés de ce fait, les autres s'en référant simplement à l'autorité de leur professeur. Nous avons été frappée toutefois par les réponses de quelques élèves qui ont été les seuls à avoir compris que deux inversions ramènent l'ordre direct. Ce résultat provient certainement du fait que leur maître, M. Extermann, persuadé de l'utilité des exemples concrets, les a fait intervenir largement dans son enseignement. Il a coutume de

¹ Comme on l'a vu, cette feuille II d'exercices algébriques fait intervenir, en outre de la règle des signes, d'autres opérations telles que les fractions ou les puissances. Il en résulte que nos sujets multiplient les erreurs.

découper une locomotive dans du papier devant sa classe et c'est en lui faisant exécuter divers mouvements sur le tableau noir qu'il entreprend l'explication de l'addition et de la soustraction algébriques, en y introduisant même des nombres. C'est par le même moyen qu'il enseigne la multiplication algébrique; pour la multiplication de deux quantités négatives par exemple, il fait tourner deux fois la locomotive, supposant une plaque tournante sur laquelle passe cette dernière.

Nous pensons que le lecteur sera intéressé par la technique de M. Extermann :

Le maître découpe une locomotive dans du papier; d'un côté il inscrit un signe plus et de l'autre un signe moins. Au tableau noir il trace une ligne horizontale sur laquelle il dépose la locomotive. Différents mouvements sont possibles :

La locomotive tournée du côté du signe $+$ avance dans le sens positif, c'est-à-dire la cheminée en avant, ce qui nous donne un second signe $+$. Ainsi, lorsque nous avons deux signes positifs, nous savons que la locomotive roule vers le signe plus. Deux signes positifs nous donnent donc un résultat positif.



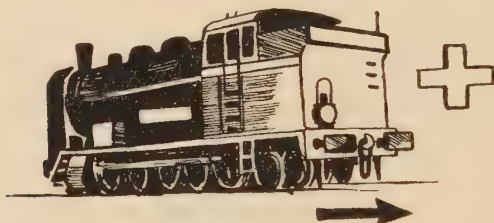
Si la locomotive recule (ce qui nous vaut un signe négatif), elle se dirige vers le signe moins. Le signe plus sur la locomotive, le signe moins parce qu'elle recule, ces deux signes, dont l'un est négatif et l'autre positif, nous donnent donc un résultat négatif.



Supposons maintenant que la locomotive aille tourner sur une plaque tournante; elle a ainsi effectué un demi-tour et présente maintenant son côté où se trouve le signe moins. Si la locomotive avance, elle roule dans le sens négatif. Le signe moins sur la locomotive, un signe plus parce qu'elle avance, et le résultat de ces deux signes dont l'un est positif et l'autre négatif, est négatif.



Si la locomotive recule, elle roule dans le sens négatif. Le signe négatif sur la locomotive et un signe négatif parce qu'elle recule, deux signes négatifs donc, nous donnent un résultat positif.



Nous avons là un bel exemple concret de la règle des signes.

CONCLUSION DES EXPÉRIENCES ALGÈBRIQUES

Les résultats de nos expériences algébriques ont donc mis en évidence le fait qu'il est parfaitement possible de résoudre des exercices algébriques sans avoir compris de quoi il s'agit. Ces élèves travaillent sur des symboles auxquels ils n'attribuent aucune signification. Il leur a suffi d'apprendre les règles qui régissent ces différents symboles, mais on peut se demander si ce défaut de compréhension initial ne risque pas de peser sérieusement sur la suite de leurs études.

Conclusion

Nous arrivons au terme de notre travail expérimental sans prétendre naturellement avoir épuisé le sujet. Nous pensons toutefois que ces expériences pourront servir de base de discussion sur l'enseignement de la règle des signes et de l'algèbre élémentaire en général. Le caractère de ces thèses provoquera sans doute des réactions; nous souhaitons qu'il se trouve des lecteurs que leur scepticisme conduira à une expérimentation propre à faire avancer la science psychopédagogique.

Avant d'apporter nos propres conclusions, nous croyons utile de présenter à la fin de ce travail un aperçu de différentes explications de la règle des signes qu'en ont données mathématiciens et philosophes. Nous reprendrons ensuite les hypothèses qui ont constitué la base de notre travail expérimental: hypothèses psychologiques exposées dans notre Introduction et hypothèses pédagogiques formulées dans la Première partie de cet ouvrage. Nous rappellerons quelques-unes de nos expériences les plus caractéristiques et montrerons dans quelle mesure notre travail expérimental dans son ensemble a pu répondre aux questions que nous nous étions posées.

L'analyse de la règle des signes a été tentée par de nombreux spécialistes. Mais les incertitudes, pour ne pas dire les impasses auxquelles aboutissent sur tel ou tel point particulier certains de ces travaux, soulignent seulement les difficultés auxquelles on se heurte lorsqu'on veut analyser et expliquer par la méthode philosophique une règle dont l'efficacité est cependant prouvée par l'expérience.

Nous pensons qu'il est intéressant toutefois de résumer l'opinion d'un philosophe comme Brunschvicg et celle de quelques mathématiciens sur cette question ardue de la règle des signes.

Brunschvicg discute la règle des signes dans son livre : *Les étapes de la philosophie mathématique*¹. Il pose tout d'abord que $(-5) \cdot 10 = -50$ se conçoit aussi naturellement que : francs $5 \cdot 10 =$ francs 50. Pour la troisième forme de la règle des signes, il fait appel à l'interversion des facteurs en affirmant qu'il n'y a pas de raison de ne pas en admettre la

¹ BRUNSCHVICG, LÉON, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, Félix Alcan, 1929, p. 539-541.

légitimité. Quant à l'opération de la quatrième forme, il admet qu'elle est irreprésentable, et qu'à ce moment l'appui des analogies pratiques nous abandonne. Il cite deux exemples pour l'addition et un exemple pour la multiplication aboutissant à une sorte d'absurdité à savoir que celui qui multiplie sa dette par une autre dette se constitue un capital. Il omet sur ce point de donner un signe au multiplicateur, et se contente de dire « multiplie », tandis qu'il répète le signe des addendes qui sont naturellement égaux puisqu'il s'agit d'une multiplication ! Or ne pas donner ce signe revient à dire plus. Son exemple correspond ainsi à la troisième forme de la règle des signes : ajouter deux fois une dette ($-x$) . 2. Brunschvicg se demande si le résultat de la première ($+. + = +$) et de la quatrième forme de la règle des signes ($- . - = +$) sont bien effectivement les mêmes. De deux choses l'une, dit-il, ou cette identification est le résultat d'une libre convention, ou bien il est possible d'établir entre les deux opérations, une connexion capable de faire participer la seconde à la vérité de la première.

Brunschvicg affirme que cette connexion se présentera de la façon la plus simple. Il remplace un exemple numérique de la première forme de la règle des signes par une multiplication de binômes de même valeur numérique. Le premier membre de chacun de ces binômes est positif tandis que le second membre est négatif. Les trois premières opérations sont connues et donnent zéro pour résultat. Quant à la quatrième opération ($- . - = +$), le résultat, dit-il, ne peut en être fixé que par convention, mais la convention obéit à une loi de convenance. La règle doit être telle que les résultats de la multiplication des binômes et de la première forme de la règle des signes soient égaux. Ce à quoi on ne peut satisfaire qu'en posant que la quatrième forme de la règle des signes a le même résultat que la première. Ceci justifie la règle des signes. Cette extension est d'après lui une convention à priori, mais non pas arbitraire, convention qui procède de l'élan acquis par l'esprit au contact de la réalité. Brunschvicg ajoute qu'entre le domaine des nombres positifs et le domaine des nombres négatifs, il n'y a pas identité logique. Il estime qu'on ne peut pas justifier le passage de l'un à l'autre par le moyen d'un principe tel que la permanence des formes opératoires. Substituer à la notion d'un principe à priori celle d'une connexion, voilà, selon lui, ce qu'il y a de fondé dans la pensée de Hankel. Là où Cournot disait connexion rationnelle, Brunschvicg dit plutôt connexion naturelle : « Le caractère naturel de cette connexion se confirme par la facilité de la représentation spatiale. La conception cartésienne de la géométrie permet d'interpréter les solutions négatives et leurs combinaisons de façon à présenter un parallélisme rigoureux avec l'algèbre. »

Du point de vue philosophique, Brunschvicg estime que le succès de la traduction géométrique des opérations algébriques a peut-être été trop complet. Car l'avantage qu'elle présentait naturellement a

tendance à être transformé en une nécessité. Avec les nombres imaginaires cependant, on a dissocié les combinaisons algébriques de leur interprétation géométrique et on a précisé les rôles respectifs de l'opération proprement intellectuelle et de l'image intuitive. Brunschvicg a raison nous semble-t-il de mettre en garde contre le danger de voir une nécessité inscrite dans la réalité des choses. Certes l'esprit joue un rôle très important dans la formation des lois et les thèses empiriques ont bien tort de le négliger. Notre travail psychologique et pédagogique a sans cesse montré l'interdépendance des facteurs extérieurs et internes. Nous avons insisté autant sur l'importance des données concrètes que sur les opérations que le sujet doit effectuer.

Citons enfin les analyses de quelques mathématiciens : Euler commence par donner un exemple concret pour la seconde forme de la règle des signes. De là il tire la conséquence qu'une quantité positive multipliée par une quantité négative donne un produit négatif. Quant à la quatrième forme, Euler affirme, sans toutefois justifier cette affirmation, que le résultat ne peut être de signe moins car cette forme ne peut pas produire le même résultat que la seconde forme, mais plutôt un résultat opposé ¹.

Boutroux déclare que, puisque moins par plus donne moins, il faut admettre que moins par moins donne plus. Il s'agit donc là d'une convention, d'une définition, car la notion de multiplication de deux quantités négatives n'a, à priori, aucun sens. Ces deux mathématiciens, Euler et Boutroux, procèdent d'une façon semblable et représentent cette attitude très répandue parmi les mathématiciens et selon laquelle les définitions en elles-mêmes sont suffisantes ².

Maclaurin explique la règle des signes par le fait que la multiplication n'est qu'une addition ou une soustraction répétée. Il illustre d'autre part la seconde forme avec la multiplication $(a - a)n$ et la quatrième forme avec la multiplication $(a - a) - n$, toutes deux en partant de la définition $a - a = 0$. Maclaurin donne ainsi une explication essentiellement symbolique de la règle des signes au sens des définitions attachées aux symboles opératoires ³.

On aura remarqué que les explications des auteurs que nous venons de citer se limitent au domaine purement mathématique ou philosophique mais laissent de côté l'aspect psychologique du problème. Pour un travail comme le nôtre, qui est orienté vers la pédagogie, cet aspect psychologique figure au premier plan. De ce point de vue, il nous semble qu'une remarque essentielle doit être faite : Dans la multiplication de quantités algébriques telle que la formule la règle des signes, deux sortes de signes

¹ EULER, LEONARD, *Éléments d'algèbre*. Académie impériale des sciences de Saint-Petersbourg, 1770, p. 16.

² BOUTROUX, PIERRE, *Les mathématiques*. Paris, Albin Michel, 1922, p. 95.

³ MACLAURIN COLIN, M. A., *A Treatise of Algebra*. London, A. Millar and J. Nourse, 1748, p. 12-16. On trouvera en annexe les textes de ces auteurs.

interviennent qui sont confondus dans une même expression graphique. Tout d'abord le signe de l'opération ou signe opératoire qui exprime l'action d'ajouter ou d'enlever un certain nombre de fois une certaine quantité. Puis le signe propre, positif ou négatif, de cette quantité. Il s'agit de deux couples de signes plus et moins. Remarquons que la difficulté que rencontrent la plupart des adolescents à comprendre cette règle provient certainement en grande partie du fait que les signes propres et les signes opératoires sont représentés graphiquement de la même façon. Ce fait se trouve cependant justifié par la pratique puisque ces deux sortes de signes jouent le même rôle et sont interchangeables. Les signes moins tant propres qu'opératoires, marquent l'opposé du signe plus et sont ainsi synonymes d'une inversion. Or qu'implique l'inversion, sinon le retour en sens contraire, c'est-à-dire la réversibilité ?

Or la psychologie génétique telle que l'a élaborée Piaget en se basant sur de nombreuses expériences, accorde une très grande importance à la réversibilité. Voici comment il caractérise le comportement du sujet dans ses relations avec le monde extérieur. Il appelle assimilation, l'action de l'organisme sur les objets qui l'entourent et accommodation, l'action du milieu sur l'organisme; il a montré que ces deux processus d'assimilation et d'accommodation coexistent tout au long du développement de l'intelligence. L'action du sujet a pour but d'établir l'équilibre entre ces deux pôles d'assimilation et d'accommodation. Cet équilibre, atteint vers l'âge de 7 ans, entraîne alors la capacité pour l'enfant d'effectuer des opérations réversibles, c'est-à-dire d'intérioriser des mouvements et de les imaginer dans les deux sens de parcours. Cette réversibilité reste cependant encore limitée au plan concret. Il faut attendre l'âge de 11 ou 12 ans pour que l'enfant soit capable de réversibilité sur le plan formel.

HYPOTHÈSES

Les données de la psychologie opératoire nous permettaient alors de formuler des hypothèses précises quant au développement probable de la compréhension de la règle des signes par les enfants.

Au stade de la pensée préopératoire (de 4 à 7 ans), l'enfant devrait être déjà capable de comprendre partiellement la règle des signes.

A partir de l'âge de 7 ou 8 ans, l'enfant devrait être capable d'exécuter la règle des signes sur le plan concret, c'est-à-dire qu'avec un dispositif approprié, cette règle dans son ensemble, signes et quantités, devrait être découverte expérimentalement par l'enfant.

A partir de l'âge de 11 ou 12 ans, l'enfant devrait être capable d'exécuter la règle des signes sur le plan formel. L'enfant étant alors capable de raisonnement hypothético-déductif, il peut se fier à la nécessité

du raisonnement lui-même sans s'appuyer sur des actions en cours et saisir la règle exprimée sous forme de propositions. Piaget souligne cependant le fait qu'il appartient à la logique de généraliser et de schématiser les opérations formelles tandis que le rôle de la psychologie consiste à replacer ces opérations dans leur contexte vivant. Ainsi la règle des signes ne devrait avoir de signification pour l'élève que si elle s'appuie sur les opérations concrètes dont elle est issue.

La psychologie opératoire nous permettait également de poser les hypothèses pédagogiques suivantes :

La plupart des pédagogues ont tort d'adopter une méthode purement verbale, exposant logiquement la règle des signes, sans songer à lui donner une signification.

Les pédagogues qui ont reconnu la place importante qu'il faut accorder aux données concrètes et à l'action ne vont cependant pas assez loin dans cette voie lorsqu'ils exécutent eux-mêmes les expériences devant des élèves qui restent passifs.

Ont par contre raison les pédagogues qui ont compris la nécessité d'amener les élèves à recourir eux-mêmes à l'expérimentation.

EXPÉRIENCES ET VÉRIFICATION DES HYPOTHÈSES

Les hypothèses posées, nous avons procédé à des expériences destinées à les confirmer ou à les infirmer. Nous avons interrogé plus de 650 élèves de 5 à 15 ans. Aucun sondage n'avait été fait sur le sujet, aussi avons-nous tâtonné et essayé différents dispositifs en commençant par les plus compliqués pour aboutir aux plus simples ! Ces expériences mettaient en œuvre les notions d'inversion, de réversibilité, d'équilibre par rapport à un axe, de direction et de grandeur par rapport à un point d'origine, tout ce qui fait du calcul algébrique un véritable système de termes reliés les uns aux autres et ramenés à un centre de référence.

Certaines de ces expériences ont été conçues de telle façon qu'elles peuvent être utilisées avec des élèves de 5 à 15 ans, d'autres ne sont adaptées qu'à un âge déterminé.

Les expériences génétiques ont montré qu'il y a trois étapes principales dans la compréhension de la règle des signes, à savoir le stade de la pensée représentative préopératoire, celui des opérations concrètes et celui des opérations formelles. Prenons comme exemple de ce premier groupe, l'expérience qui utilise une voiture. Les signes plus et moins, propres et opératoires, sont représentés par la marche avant et arrière de la voiture vers un but situé en avant ou en arrière par rapport à l'enfant ou par convention. L'inversion est donc représentée par le changement de marche ou d'orientation du véhicule. Voici comment l'expérience a été présentée et résolue à chacun des trois stades :

1. Nous avons interrogé des enfants à partir de l'âge de 5 ans. L'expérience que nous leur proposons est la plus simple possible. Une voiture sur le sol, au milieu de la salle d'expériences, deux points d'arrivée opposés : le premier vers la fenêtre, le second vers la corbeille à papiers. Dans l'esprit de l'expérimentateur cette expérience correspond à la règle des signes de la manière suivante :

marche avant de la voiture = + ;
 marche arrière de la voiture = — ;
 orientation de la voiture vers la fenêtre = + ;
 orientation de la voiture vers la corbeille à papiers = — ;
 arrivée à la fenêtre = + ;
 arrivée à la corbeille à papiers = — .

On obtient ainsi les quatre formes de la règle des signes :

marche avant (+), orientation de la voiture vers la fenêtre (+),
 la voiture arrive à la fenêtre (= +);
 marche arrière (—), orientation de la voiture vers la corbeille à papiers (—), la voiture arrive à la fenêtre (= +);
 marche avant (+), orientation de la voiture vers la corbeille à papiers (—), la voiture arrive à la corbeille à papiers (= —);
 marche arrière (—), orientation de la voiture vers la fenêtre (+),
 la voiture arrive à la corbeille à papiers (= —).

Il est entendu que l'enfant n'a aucune idée de ces signes et l'expérimentateur se garde bien de lui en parler. Le seul but que nous poursuivons en faisant exécuter cette expérience aux enfants de 5 à 7 ans, est de leur faire jouer cette règle et de voir dans quelle mesure ils sont capables de la comprendre sous cette forme de jeu.

En résumé ces expériences nous ont montré que les notions d'inversion, d'équivalence qui sont à la base de tout calcul algébrique, sont accessibles à de jeunes enfants dès l'âge de 5 ans, à la condition toutefois d'adopter une forme concrète. Ces enfants ne peuvent cependant pas saisir l'expérience dans son ensemble. Ils ne sont pas capables de réversibilité, sauf lorsqu'ils peuvent s'accompagner de leurs propres mouvements et que le point d'arrivée de la voiture correspond à leur point de vue. Ce qui paraît impossible chez les enfants du stade représentatif, c'est de concevoir un système de référence unique, immobile et indépendant de leur propre personne. Nous avons vu que les enfants de 5 à 7 ans ayant à envisager deux buts différents pour les mouvements de leur petite voiture ne conçoivent ces buts que séparément, ne faisant de chacun d'eux qu'un but unique, sans relation aucune avec l'autre et rapportant successivement à l'un puis à l'autre les deux groupes de mouvements de leur jouet. En somme le système de référence se déplace tout entier avec l'enfant.

Cette vision fragmentaire et instantanée de la réalité que Piaget a bien mise en évidence et dont il a fait l'une des caractéristiques de l'âge représentatif préopératoire, nous l'avons constatée abondamment au cours de nos expériences. Elle se retrouve d'ailleurs aux autres stades du développement intellectuel, mais sous des aspects différents. Au stade concret, c'est la difficulté de formuler en termes coordonnés un ensemble d'opérations; au stade formel, la difficulté d'exprimer cette même coordination par des signes mathématiques. Un des points importants qu'ont mis en lumière nos expériences est donc cette difficulté de coordination. Le petit enfant (5-7 ans) voit clairement des points concrets mais ne parvient pas à les relier les uns aux autres; il ne conçoit qu'une série d'images, formant chacune un tout, sans parvenir à les relier, même sur le plan concret.

2. Pour le stade des opérations concrètes, qui correspond à l'âge de 7 à 11 ans, l'expérience se rapproche davantage de la règle des signes mathématiques, et ceci à deux points de vue : D'une part, nous ne nous sommes plus bornée à appeler les objets de la salle d'expériences par leur nom, mais leur avons donné une signification. D'autre part, nous avons accompagné de multiplications numériques les quatre formes de la règle des signes. C'est ainsi que les quantités sont données par un certain nombre de tours de moteur dans le sens positif ou dans le sens négatif en marche avant ou en marche arrière et représentés concrètement par des jetons. Les enfants de ce stade aperçoivent un lien entre ces opérations concrètes et montrent par leurs réactions au cours du jeu qu'ils savent les ramener à un centre unique et immobile de référence; mais ils ont beaucoup de peine à formuler ces liaisons par des commentaires verbaux, même en utilisant des termes concrets.

3. Les enfants du stade formel enfin (à partir de 11 ou 12 ans), s'ils arrivent à formuler clairement l'expérience sous la forme de règles exprimées en termes concrets, trouvent à leur tour beaucoup de difficulté à exprimer ces mêmes rapports à l'aide de signes abstraits. Ces élèves sont capables de saisir la relation entre l'expérience que nous leur proposons et la règle des signes mathématiques et ils apprécient cette explication concrète.

Les expériences adaptées à un âge déterminé sont fort différentes les unes des autres. Elles illustrent la règle des signes additive (avec ou sans signe plus) et la règle des signes multiplicative. La règle des signes est additive lorsqu'elle ne fait intervenir qu'une espèce de signes, l'opération consistant alors en une addition d'unités prises dans leur sens propre. Les expériences comportent une multiplication lorsqu'elles font appel aux deux espèces de signes, propres et opératoires. Il s'agit alors d'enlever ou d'ajouter un certain nombre de fois un certain nombre d'unités positives ou négatives. Une partie de nos expériences de ce

groupe portent sur l'étude des signes tandis que d'autres concernent plutôt les quantités. La plupart d'entre elles enfin font intervenir des dispositifs, quelques-unes toutefois se passent sur le plan purement verbal.

Prenons, comme exemple de ce groupe, une expérience portant sur les signes, celle qui utilise, en fait de dispositif, des petits chiens aimantés pouvant glisser dans une rainure de bois. Après avoir joué librement avec ces petites figurines, l'enfant les disposait dans la rainure et constatait que, placés face à face ou dos à dos, les chiens s'attiraient, mais qu'en revanche, placés tête à dos ils se repoussaient. On comprend alors que pour l'expérimentateur qui attribue un signe à la face et à l'arrière des petits chiens, le signe moins au dos, le signe plus à la tête, et, en outre, un signe plus au phénomène d'attraction et un signe moins au phénomène de répulsion, les enfants avaient en mains une figuration complète du jeu des signes. On constate alors que dès l'âge de 7-8 ans les enfants sont capables de placer les chiens dans une certaine position pour obtenir un résultat déterminé (attraction ou répulsion) et que, dès l'âge de 8 ans, ils sont à même de traduire en signes les positions de leurs petits animaux. Autrement dit, ils peuvent alors formuler en quatre combinaisons de signes les quatre positions possibles de leurs petits chiens.

Ce qui est bien certain, c'est que nos expériences matérialisant la règle des signes trouvent un écho même chez les jeunes enfants du stade représentatif préopératoire, du moins sous leurs aspects les plus élémentaires; qu'elles sont résolues d'une façon frappante par les enfants du stade concret et que ceux du stade formel (ceux de 13 ou 14 ans en tout cas) y reconnaissent l'application ou la base concrète de la règle des signes, règle que souvent ils n'avaient apprise que comme une sorte de formule magique, sans en connaître les fondements réels. Pour certains d'entre ces derniers, nous l'avons vu, les expériences concrètes sont une sorte de révélation et un soulagement dans la gêne, inconsciente ou sentie, que leur causait le caractère supposé arbitraire et gratuit de la règle des signes.

Notre étude expérimentale des différentes méthodes pédagogiques nous a permis de constater également que la méthode active, expérimentale, basée sur la psychologie opératoire, est adaptée aux besoins de l'enfant. Sans doute avons-nous reconnu l'avantage des méthodes intuitives sur les méthodes verbales, parce qu'elles font largement intervenir les données concrètes. Nous leur avons cependant reproché de laisser l'enfant dans une trop grande passivité, défaut que ne comporte pas la méthode active.

Ceci nous amène à une conclusion d'ordre pédagogique. Etant donné que nos expériences ont mis en lumière ce fait d'une vérité reconnue que l'acte concret précède et permet l'opération formelle, fait qui se trouve

pleinement vérifié dans les différentes étapes de la compréhension algébrique, ne serait-il pas opportun et même nécessaire de recommander l'usage d'exemples et d'exercices concrets dans l'enseignement des éléments de l'algèbre et, mieux encore, de recommander ces exercices sous forme de jeux, avant même que l'enfant ait atteint l'âge formel ? Il nous semble que des exercices ou jeux inspirés des expériences des perles, des engrenages et des poulies, de la voiture et de la balance, dans leurs formes les plus simples, seraient propres à faire pénétrer dans l'esprit des jeunes enfants du stade représentatif préopératoire, même à leur insu, certaines notions sur les inversions, sur les équivalences (même sans éléments numériques) qui les prépareront à des acquisitions ultérieures. De même des exercices ou jeux inspirés des expériences de la balance, de la voiture (dans ses formes plus compliquées) nous semblent propres à acheminer les enfants du stade concret vers la compréhension des règles de coordination et des systèmes de référence nécessaires aux études algébriques.

Deux notions surtout, on l'a vu par nos résultats, présentent de grandes difficultés pour les enfants, ce sont celles de réversibilité et de coordination. Or la réversibilité est la propriété la plus caractéristique de toutes les transformations mathématiques et logiques. Elle est la loi d'équilibre essentielle qui distingue l'intelligence de la perception ou de l'habitude. Tout le développement de l'intelligence est même caractérisé par un passage de l'irréversibilité propre aux actions primitives, à la réversibilité de l'opération.

Nous ne saurions trop insister à ce sujet sur des jeux du genre de notre expérience (p. 70-74). On se rappelle qu'il s'agissait d'une voiture exécutant sur une table allongée des mouvements en marche avant ou marche arrière vers deux buts placés, l'un devant, l'autre derrière l'enfant installé sur le côté de la table; le regard dirigé parallèlement à la marche de la voiture. Cet exercice, ou tout autre de ce genre, a le grand avantage de donner à l'enfant l'impression vécue d'un point d'origine qui se confond avec sa propre personne et par rapport auquel s'organisent et les deux buts opposés et les mouvements de la voiture. Il s'agit d'un point d'origine unique immobile pour deux ordres d'opérations (positif et négatif) tel que n'aurait pu le concevoir un enfant du stade représentatif préopératoire, mais en même temps d'un point d'origine qui n'est pas extérieur à l'enfant. Autrement dit, on a là un exercice qui facilite à l'enfant le passage des vues fragmentaires et instantanées de la réalité à la vision d'un ensemble dont les parties sont reliées entre elles. Le fait que l'enfant reste lui-même, comme au stade représentatif préopératoire, un centre de référence, lui rend sensibles les rapports qui unissent à ce centre les divers mouvements et positions du mobile, mieux que ne le ferait un système de référence qui lui serait complètement extérieur. Une fois bien assimilées par ce jeu les relations de tous les

éléments en cause, l'enfant deviendrait sans doute plus apte à comprendre objectivement un système détaché de sa personne.

Il nous paraît en tout cas que des exercices ou jeux bien choisis qui mettraient à la portée des jeunes enfants sous une forme concrète les principes fondamentaux des mathématiques et en particulier ceux de la règle des signes et qui offriraient, toujours sous une forme concrète, une explication de ces principes même aux enfants dont l'âge correspond aux débuts du stade formel, il nous paraît, disons-nous, que de tels exercices faciliteraient beaucoup aux enfants la compréhension des premières notions de l'algèbre et même la poursuite ultérieure de leurs études de mathématiques. Sans doute n'affirmons-nous rien de nouveau en soulignant que l'enseignement doit commencer par l'action concrète. C'est là un des chevaux de bataille de toute la psychologie de l'enfant et de la pédagogie moderne. Mais nous osons croire que notre étude, qui porte sur une des branches les plus abstraites de l'enseignement, n'est pas superflue, car elle montre que, même dans ce domaine, la compréhension représentative et concrète, parce qu'elle précède la compréhension des principes abstraits, facilite l'acquisition de ces principes.

Annexe

ROLLE, *Traité d'algèbre*. Paris, chez Estienne Michallet, 1650, p. 78.
Eviter les nombres négatifs.

... on pourra toujours faire que chaque inconnue dégagée soit exprimée par un nombre positif, si l'on se sert de la méthode qui suit : ou bien on conclura que la chose est impossible.

C. BOURLET, *Leçons d'algèbre élémentaire*. Paris 1896, Armand Colin et C^{ie}, éditeurs (p. 21 et 33).

Somme algébrique ... (n° 10).

Convention. — a désignant un nombre algébrique, le symbole $+a$ représente aussi ce nombre et le symbole $-a$ représente le nombre égal et de signe contraire à a .

Exemples :

$$\begin{aligned} + (+4) &= +4 \\ - (+3) &= -3 \\ + (-2) &= -2 \\ - (-1) &= +1 \end{aligned}$$

Cette convention peut encore s'énoncer ainsi : *deux signes consécutifs équivalent à un signe unique qui est le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que les deux signes sont les mêmes ou sont contraires*. C'est ce qu'on appelle la *règle des signes* qui se résume dans le tableau suivant :

$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

Multiplication

... Le signe du produit de deux facteurs s'obtient encore par la *règle des signes* que nous avons donnée plus haut (n° 10) et qui peut se résumer dans le tableau suivant :

Signes des facteurs	{	$+$	$+$	$-$	$-$
		$+$	$-$	$+$	$-$
Signe du produit		$+$	$-$	$-$	$+$

LÖRCHER, *Lehr u. Uebungsbuch der Algebra*. Stuttgart, fr. Grub, 1912, p. 29.

$$(-m) \cdot (-a) = +am$$

Regel : Gleichartige Grössen geben ein positives Produkt, entgegengesetzte geben ein negatives Produkt.

R. ESTÈVE, *Cours d'algèbre*. Paris, Gauthiers-Villars, 1926, p. 24.

Multiplication

Produit de deux nombres algébriques. — On appelle produit de deux nombres algébriques a et b , non nuls, un troisième nombre algébrique p qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues de a et de b et pour signe le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que a et b sont de même signe ou de signes contraires.

J. H. ADDOR, *Eléments d'algèbre*. Lausanne, Payot, 1926, p. 27.

Produit de deux nombres. — On appelle produit de deux nombres relatifs a et b , le nombre relatif qui a pour valeur absolue le produit des valeurs absolues de a et b et pour signe $+$ ou $-$ suivant que a et b ont le même signe ou des signes différents.

Le produit de a et b se représente par $a \times b$ ou $a \cdot b$ ou encore ab . Les nombres a et b sont les facteurs du produit.

Exemples :

$$\begin{array}{ll} (+6) \cdot (+5) = +30; & (-6) \cdot (+5) = -30 \\ (+6) \cdot (-5) = -30; & (-6) \cdot (-5) = +30 \end{array}$$

PIERRE BOUTROUX, *Les mathématiques*. Paris, Albin Michel, 1922, p. 95.

Si l'on veut effectuer sur ces quantités des *multiplications*, on raisonne comme il suit :

Le produit de la quantité négative n par la quantité positive a — produit que, suivant les habitudes de l'algèbre, nous désignons par $a n$ (ou $n a$) — est une quantité négative de valeur absolue $a p$. En effet, a fois n , c'est a fois p retranché de zéro; c'est par conséquent $-ap$.

Le produit de deux quantités négatives n et n' — produit $n n'$ — devra être regardé comme égal à la quantité positive pp' . En effet, puisque moins p fois p' est $-pp'$ il faut admettre que moins p fois moins p' , c'est $+pp'$.

C'est là en réalité une convention, je veux dire une définition; car la notion de multiplication de deux quantités négatives n'a *a priori* aucun sens. Nous sommes obligés de définir ce que nous convenons d'entendre par là.

J. F. RAUPBACH, *Die Elemente der Algebra und Analysis*. Breslau, Wilhelm Gottlieb Korn, 1815, p. 7.

Multiplication

$$\dots (a - b) (c - d) \dots$$

Die Regel der Vorzeichen für die ausgeführte Multiplikation blosser Quantitäten ist folglich: das Produkt gleichgezeichneter Teile der beiden Faktoren wird addiert, das Produkt ungleich gezeichneter wird subtrahiert.

Betrachtet man Faktoren und Produkt als algebraische Summen, so ist die Regel: gleichnamige Faktoren geben ein positives, ungleichnamige ein negatives Produkt; $+a \times -d = -ad$; $-b \times -d = +bd$; $a \times -d = d \times -a$.

V. KRAKOWSKI, *Elementare Algebra*, Zurich, T. Huonder, 1944, p. 49.

Multiplikation zwei ganzer Zahlen, von denen die eine null ist.

$$a) \quad 0 \cdot (+p) = 0 \cdot p = 0 \qquad \qquad \qquad \underline{0 \cdot (+p) = 0}$$

$$b) \quad 0 \cdot (-p) = 0 (0 - p) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot p = 0 - 0 = 0 \qquad \qquad \qquad \underline{0 \cdot (-p) = 0}$$

Multiplikation zweier relativer ganzer Zahlen:

$$a) \quad (+a) \cdot (+b) = a \cdot b = +ab \qquad \qquad \qquad \underline{(+a) \cdot (+b) = +ab}$$

$$b) \quad (-a) \cdot (-b) = (0 - a) \cdot (-b) = 0 \cdot (-b) - a \cdot (-b) = 0 - a(0 - b) = 0 - 0 + ab = +ab$$

$$\qquad \qquad \qquad \underline{(-a) \cdot (-b) = +ab}$$

$$c) \quad (+a) \cdot (-b) = a \cdot (0 - b) = a \cdot 0 - ab = -ab$$

$$\qquad \qquad \qquad \underline{(+a) \cdot (-b) = -ab}$$

$$d) \quad (-a) \cdot (+b) = -(+b) \cdot (-a) = -ba = -ab$$

$$\qquad \qquad \qquad \underline{(-a) \cdot (+b) = -ab}$$

Der absolute Betrag des Produktes zweier relativer ganzen Zahlen ist gleich dem Produkt ihrer absoluten Beträge.

Das Vorzeichen dieses Produktes ist

$$\begin{array}{ccc} + & | & - \\ & \text{wenn die zwei Zahlen} & \\ \text{gleichsigniert} & | & \text{gegensigniert} \\ & \text{sind.} & \end{array}$$

Folgerungen

$$1. \quad +a = (+1)(+a) = (+1) \cdot a$$

$$\quad -a = (-1)(+a) = (-1) \cdot a$$

Somit: Eine $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{positive} \\ \text{negative} \end{smallmatrix} \right\}$ Zahl ist darstellbar als Produkt aus $\left\{ \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \right\}$ und ihrem absoluten Betrag.

2. Das Produkt beliebig vieler positiver Faktoren ist stets positiv.

3. Das Produkt beliebig vieler negativer Faktoren ist $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{smallmatrix} \right\}$

je nachdem die Anzahl dieser Faktoren $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{smallmatrix} \right\}$ ist.

4. Sind die Faktoren eines Produktes zum Teil positiv, zum Teil negativ, so hängt das Vorzeichen dieses Produktes von der Anzahl der negativen Faktoren an :

ist diese $\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}$, so ist das Produkt $\left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{array} \right\}$.

5. Der absolute Betrag des Produktes beliebig vieler Faktoren ist gleich dem Produkt der absoluten Beträge dieser Faktoren.

HENRION, *Traité d'algèbre*. Paris, Fleury Bourriquant, 1621, p. 16-17.

... Quand le nombre cossique composé ou diminué, est multiplié ou divisé par un nombre absolu ou cossique, tant simple que composé ou diminué, outre ce qui est dit ci-dessus, il faut surtout avoir égard aux signes + et — : Car quand les nombres se multiplient ou divisent ont un même signe, il faut apposer au produit le signe +, mais quand l'un d'iceux est +, et l'autre —, il faut donner au produit le signe —. Ce qui est aisé à retenir en mémoire par la règle suivante :

Aux signes semblables, faut poser +, mais aux dissemblables faut poser —.

(Exemples numériques.)

Or afin de rendre la vérité de cette opération tant plus manifeste, nous adiouterons encore icis deux exemples en nombres absolus :

$$\begin{array}{r} 8 - 2 \\ \hline 5 \\ 40 - 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 - 2 \\ \hline 9 - 4 \\ - 32 + 8 \\ 72 - 18 \\ \hline 72 - 50 + 8 \end{array}$$

DE CAMBEROUSSE, *Cours de mathématiques*. Paris, Gauthiers-Villars, 1884, p. 311-312

Multiplication de deux polynômes :

$$\text{soit } (A - B) (C - D) = AC - BC - AD + BD$$

Examinons ce produit : ... Il reste maintenant à savoir de quels signes des produits partiels doivent être affectés.

AC et BD étant précédés du signe +, tous les produits partiels correspondant ont le signe +. A et C représentent l'ensemble des termes du multiplicande et l'ensemble des termes du multiplicateur qui ont le signe +, B et D l'ensemble des termes du multiplicande et l'ensemble des termes du multiplicateur qui ont le signe —.

On peut donc dire que deux termes qui ont le signe + ou deux termes qui ont le signe —, c'est-à-dire deux termes qui ont le même signe, donnent un produit partiel positif. On peut donc dire qu'un terme qui a le signe — et un terme qui a le signe + ou un terme qui a le signe + et un terme qui a le signe —, c'est-à-dire deux termes qui ont des signes différents, donnent un produit partiel négatif. On est conduit à cette règle générale : Pour multiplier deux polynômes, il faut multiplier tous les termes du multiplicande par tous les termes du multiplicateur, en suivant la règle des signes.

VOELLMY und MAUTZ, *Leitfaden der Algebra*. Zurich, Orell Füssli, 1947, p. 45.

Die Multiplikation der ganzen Zahl

Vorzeichenregel. Wir suchen durch willkürliche Festsetzungen solche Regeln zu gewinnen, die geeignet sind, die drei Gesetze der Multiplikation fortbestehen zu lassen.

I. $(+a)(+c) = +ac$. Das liegt nahe, weil die positiven Zahlen auch natürliche Zahlen sind.

II. $(+a)(-d) = -ad$. Wir betrachten dieses Produkt als eine abgekürzte Summe $(-d) + (-d) + (-d) + (-d) \dots + (-d) + (-d)$ mit a Posten; dann erhalten wir nach der 1. Additionsregel $-ad$.

III. $(-b)(+c) = -bc$. Das ist nicht als Summe vorstellbar, weil hier die Anzahl der Posten negativ wäre; allein diese Festsetzung passt zu II; denn sie verlangt z. B. $-5(+6) = -30$, genau so wie $6(-5) = -30$; somit bleibt das kommutative Gesetz bestehen.

IV. $(-b)(-d) = +bd$. Das ist auch unvorstellbar; allein nur so bleibt eine frühere Regel erhalten: nämlich $(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$, worin wir die Operationszeichen als Vorzeichen auffassen.

Wir werden zeigen, dass diese Festsetzungen auch *hinreichen*, um die genannten Gesetze zu erfüllen. Etwas schwieriger liesse sich sogar nachweisen; dass nur diese und keine andern Festsetzungen dazu imstande sind. Wir merken uns die zusammenfassende.

Vorzeichenregel der Multiplikation: Zwei Faktoren von gleichem Zeichen erzeugen ein positives, zwei Faktoren von ungleichem Zeichen ein negatives Produkt.

H. JACQUEMOUD, *Résumé des leçons d'algèbre*. Genève, p. 15.

Multiplication

$(+3) \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = 3 \cdot -4 = -12$ par la déf. de la mult., de même

$(-4) \cdot (+3) = (+3) \cdot (-4) = -3 \cdot 4 = -12$ par la prop. commutative; finalement l'opération

$(-3) \cdot (-4)$ peut être remplacée par cette autre

$(5-8) \cdot (3-7) = 15 + 56 - 24 - 35 = +12$ prop. VI, p. 7, donc $(-3) \cdot (-4) = +12$.

En résumé :

$$(+3) \cdot (-4) = -12$$

$$(-4) \cdot (+3) = -12$$

$$(-3) \cdot (-4) = +12$$

$$(+3) \cdot (+4) = +12$$

On obtient la règle suivante :

Règle : Deux nombres de même signe ont un produit positif et deux nombres de signes contraires ont un produit négatif.

LÉON BRUNSCHVICG, *Les étapes de la philosophie mathématique*. Paris, Félix Alcan, 1929, p. 539-541.

... le produit : $(-)\ 5 \times 10 = (-)\ 50$, se conçoit aussi naturellement que : francs $5 \times 10 =$ francs 50. Et l'intervention des facteurs, dont il n'y a pas de raison de ne pas admettre la légitimité, nous donnera $5 \times (-)\ 10 = (-)\ 50$. Mais il n'en sera plus de même du produit de deux expressions qualifiées.

L'opération est irréprésentable; nous ne savons pas ce que le produit de deux expressions qualifiées peut donner dans le domaine de ces quantités, tel que nous l'avons constitué jusqu'ici. L'appui des analogies pratiques nous abandonne; les Hindous disaient bien : « retranchée de zéro, dette devient richesse, et richesse devient dette »; et l'on peut ajouter avec le proverbe : *qui paie ses dettes s'enrichit*; mais peut-on concevoir que qui multiplie sa dette par une autre dette se constitue un capital ? Sans doute l'on profitera de cette ignorance pour réclamer le droit à l'exercice du libre-arbitre; c'est par décret que l'on posera la règle des signes¹, et que l'on écrira que le produit de $(-)\ 5$ par $(-)\ 10$ est le nombre positif 50.

Seulement la difficulté que l'on aurait ainsi écartée n'est pas tout à fait celle qui se pose dans la réalité. On va se trouver en présence de deux égalités :

$$\begin{aligned} 5 \times 10 &= 50 \\ (-)\ 5 \times (-)\ 10 &= (+)\ 50 \end{aligned}$$

La question est de savoir si la quantité $(+)\ 50$ qui correspondrait par convention à la multiplication de deux nombres négatifs est effectivement la même quantité que le nombre naturel 50, produit des deux entiers positifs 5 et 10. De deux choses l'une : ou cette identification est le résultat d'une libre convention, la première quantité et la seconde devront alors être toutes deux des notions symboliques, dépourvues de toute signification intrinsèque; le calcul des entiers positifs et celui des expressions qualifiées perdront définitivement toute valeur scientifique pour n'être plus qu'un jeu d'écritures — ou bien il est possible d'établir entre l'opération dont la première quantité est issue et l'opération dont la seconde provient, une connexion capable de faire participer la seconde à la vérité de la première.

Cette connexion se présentera d'ailleurs de la façon la plus simple. Remplaçons le produit 5×10 par l'expression équivalente :

$$(10 - 5) \times (20 - 10)$$

et effectuons les opérations. Sur les quatre opérations, il y en a trois que nous savons faire et qui nous donnent : $200 - 100 = 100$, c'est-à-dire 0. Reste la quatrième opération : la multiplication des quantités affectées du signe —. Le résultat ne peut en être fixé que par convention; mais la convention obéit à une loi de « convenance ». La règle doit être telle que le produit $(10 - 5) \times (20 - 10)$ soit égal au produit 5×10 . Or c'est à quoi nous ne pouvons satisfaire qu'en posant :

$$(-)\ 5 \times (-)\ 10 = 50$$

¹ DIOPHANTE, *Arithmet.* Liv. I, déf. IX. Edit. P. Tannery, t. I, p. 12. λείψις ἐπὶ λείψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὑπαρξιν.

La valeur de vérité qui est dans l'égalité arithmétique

$$5 \times 10 = 50$$

s'étend à l'équation algébrique :

$$(-5) \times (-10) = 50$$

et justifie la règle des signes.

Cette extension est une convention *a priori* en ce sens qu'elle est une libre création de l'esprit. Mais *liberté* ne signifie pas *arbitraire*. La convention procède de l'élan acquis par l'esprit au contact de la réalité, et dont il se sert pour découvrir de nouveaux horizons de réalités¹. Entre le domaine des nombres positifs et le domaine des nombres négatifs, il n'y a pas identité logique; on ne peut pas justifier le passage à l'aide d'un principe tel que la *permanence des formes opératoires*. Mais on retrouve ce qu'il y a de fondé dans la pensée de Hankel, en substituant à la notion d'un principe *a priori* celle d'une *connexion* — « connexion rationnelle » suivant le langage de Cournot — et, plutôt encore, peut-être, connexion naturelle.

Le caractère naturel de cette connexion se confirme par la facilité de la représentation spatiale. La conception cartésienne de la géométrie permet d'interpréter les solutions négatives et leurs combinaisons de façon à présenter un parallélisme rigoureux avec l'algèbre². Philosophiquement on pourrait dire encore que le succès de cette corrélation a peut-être été trop complet; car il conduit à transformer un avantage qu'offre naturellement la transposition spatiale en une nécessité qui serait inscrite dans la réalité des choses. Il a fallu la considération des imaginaires pour dissocier les combinaisons algébriques de leur interprétation géométrique, et préciser les rôles respectifs de l'opération proprement intellectuelle et de l'image intuitive.

A. GRÉVY, *Traité d'algèbre*. Paris, Vuibert et Dary, 1905, p. 14.

Multiplication : Un vecteur est représenté par un nombre positif ou négatif. Pour que cette expression ait le sens ordinaire il faut choisir un vecteur unité; il est naturel de prendre pour vecteur unité, le vecteur de longueur *l* dirigé dans un sens déterminé; ce sera le sens positif.

Généralisant alors la notion de multiplication, nous pourrions dire que le vecteur mesuré par *a* est le produit par *a* du vecteur unité; de cette définition on déduit la conséquence :

Le produit du vecteur unité par un nombre est un vecteur de même sens si le nombre est positif, de sens contraire si le nombre est négatif. Sa longueur est le produit de la longueur du vecteur unité par la valeur absolue du nombre.

¹ Cf. COURNOT, *Considérations*, 1872, t. I, p. 141 : « Les signes du *négatif* et de l'imaginaire sont choses de convention ou d'usage; mais le négatif et l'imaginaire arrivent par la vertu de l'idée et le mouvement d'évolution qui lui est propre, en forçant la notation à s'y accommoder et l'esprit à le suivre, quoi qu'il lui en coûte. »

² Dans son *Invention nouvelle en algèbre*, Amsterdam 1629 (réimprimée par D. Bierens de Haan, Leyde 1884), ALBERT GIRARD avait indiqué de la façon la plus nette la traduction des nombres négatifs. « La solution par moins s'explique en géométrie en rétrogradant et le moins recule là où le plus avance. » F° 3 verso. Cf. *Encyclopédie*, loc. cit., note 149. COLEBROOKE a retrouvé les traces de cette interprétation dans *Lilivati*, op. cit., § 166, p. 71 : « Le segment ... est négatif, c'est-à-dire dans la direction contraire. »

Une nouvelle extension toute naturelle résulte du changement de vecteur unité : le produit d'un vecteur par un nombre est un vecteur de même sens si le nombre est positif, de sens contraire si le nombre est négatif; la longueur du vecteur nouveau étant le produit, par la valeur absolue du nombre, de la longueur du premier vecteur.

Si nous remplaçons les vecteurs par les nombres qui les mesurent, nous serons conduits à la multiplication de deux nombres, il suffira de remplacer le mot sens par le mot signe et le mot longueur par les mots valeur absolue.

Produit de deux nombres : On appelle produit de deux nombres a et b un nombre positif, si a et b ont même signe; négatif si a et b ont des signes différents, aucun d'eux n'étant nul. Sa valeur absolue est le produit des valeurs absolues des nombres a et b . Ainsi, on a, en conservant les notations de l'arithmétique :

$$(+3) \times (-5) = (-15)$$

$$(-4) \times (+7) = (-28)$$

$$(+3) \times (+2) = (+6)$$

$$(-5) \times (-6) = (+30)$$

EMILE BOREL, Professor an der Sorbonne zu Paris, *Die Elemente der Mathematik*, besorgt von Paul Stäckel, Heidelberg. B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1919, p. 127-128.

III. Multiplikation und Division der positiven und negativen Zahlen

100.) Wir hatten die Multiplikation der ganzen Zahlen als eine abgekürzte Addition erklärt, bei der die Summanden alle einander gleich sind (Nr. 14). Auf dieselbe Art liess sich später (Nr. 53) die Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl erklären während wir bei dem Produkt einer ganzen Zahl mit einem Bruch die Forderung der Vertauschbarkeit des Multiplikators und Multiplikandus zu Hilfe nehmen mussten (Nr. 59). Dieses Verfahren versagte jedoch bei einem Produkt von zwei Brüchen, und wir gelangten hier zu einer Erklärung der Multiplikation indem wir eine Aufgabe aus dem täglichen Leben betrachteten (Nr. 61).

Ähnlich verhält es sich mit der Multiplikation der positiven oder negativen Zahlen. Nach der ursprünglichen Erklärung der Multiplikation ist zunächst

$$3 \cdot (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$$

Aus der Forderung der Vertauschbarkeit folgt, dass auch $(-5) \cdot 3 = -15$ zu setzen ist. Man erhält also das Produkt von -5 und 3 , indem man zunächst mit der positiven Zahl 5 multipliziert, was $5 \cdot 3 = 15$ ergibt, und alsdann das Ergebnis mit dem negativen Vorzeichen versieht.

Dagegen bedarf das Produkt von zwei negativen Zahlen einer neuen Erklärung. Beispiele aus dem täglichen Leben, auf die wir in dem folgenden Kapitel (Nr. 114) ausführlich eingehen werden, haben zu der Erklärung geführt :

Erklärung. Unter dem Produkt von zwei negativen Zahlen versteht man das Produkt der absoluten Werte der beiden Faktoren.

Nach der Erklärung ist also :

$$(-3) \cdot (-5) = 3 \cdot 5 = +15$$

Dass es zweckmässig ist, das Produkt von zwei negativen Zahlen auf diese Art zu erklären zeigt folgende Ueberlegung. Wir sahen soeben, dass man das Produkt von -5 und 3 erhält, indem man zunächst mit der positiven Zahl 5 multipliziert und dann das Ergebnis mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versieht. Hat man jetzt $(-5) \cdot (-3)$ zu erklären, so liegt es nahe, in derselben Weise zu verfahren. Man bildet also zunächst

$$5 \cdot (-3) = -15$$

und gibt darauf dem Ergebnis das entgegengesetzte Vorzeichen. Auf diese Art wird in der Tat $(-5) \cdot (-3) = +15$.

HEILERMANN-DIEKMANN, *Unterricht in der Algebra*. Essen, Heilermann-Diekmann, 1912, p. 26.

Ein Produkt aus zwei negativen Faktoren ist gleich dem positiven Produkte aus ihren absoluten Werten.

$$(-a) (-b) = +ab$$

Beweis. Es ist $(-a) (-b) = -(-a) b$

da aber $(-a) b = -ab$

so ist $(-a) (-b) = -(-ab) = +ab$

LEONARD EULER, *Eléments d'algèbre*. Académie impériale des sciences de Saint-Petersbourg, 1770, p. 16

De la multiplication des quantités simples.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des nombres positifs et il n'y a pas lieu de douter que les produits que nous avons vu se former ne fussent positifs de même : savoir $+a$ par $+b$ doit donner nécessairement $+ab$. Mais il faudra examiner à part ce qui doit provenir de la multiplication de $+a$ par $-b$, et de $-a$ par $-b$.

Commençons par multiplier $-a$ par 3 ou $+3$; or puisque $-a$ peut être considéré comme une dette, il est clair que si l'on prend trois fois cette dette, elle doit aussi devenir trois fois plus grande, et que par conséquent le produit cherché est $-3a$. De même s'il s'agit de multiplier $-a$ par $+b$, on obtiendra $-ba$, ou, ce qui est la même chose, $-ab$. Nous tirons de là la conséquence, qu'une quantité positive étant multipliée par une quantité négative, le produit est négatif, et nous prenons pour règle que $+$ par $+$ fait $+$ ou *plus*, et qu'au contraire $+$ par $-$, ou $-$ par $+$ donne $-$ ou *moins*.

Il nous reste à résoudre encore ce cas où $-$ est multiplié par $-$, ou, par exemple, $-a$ par $-b$. Il est évident d'abord que, quant aux lettres, le produit sera ab ; mais il est incertain encore si c'est le signe $+$ ou bien le signe $-$ qu'il faut mettre devant ce produit; tout ce qu'on sait, c'est que ce sera ou l'un ou l'autre de ces signes. Or je dis que ce ne peut être le signe $-$: car $-$ par $+$ donne $-ab$, et que $-a$ par $-b$ ne peut produire le même résultat que $-a$ par $+b$, mais il doit en résulter l'opposé, c'est-à-dire $+ab$; par conséquent nous avons cette règle: $-$ multiplié par $-$ fait $+$, de même que $+$ multiplié par $+$.

Les règles que nous venons de développer s'expriment plus brièvement de la manière qui suit :

Deux signes égaux ou semblables, multipliés l'un par l'autre, donnent + ; deux signes dissemblables, ou contraires, donnent —. Ainsi quand il s'agit de multiplier ensemble ces nombres-ci : $+a$, $-b$, $-c$, $+d$, on a d'abord $+a$ multiplié par $-b$, fait $-ab$; ceci par $-c$, fait $+abc$, et ceci enfin multiplié par $+d$, fait $+abcd$.

F. BÜTZBERGER, *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*. Zurich, Orell Füssli, 1920, p. 10.

Multiplikation relativer Zahlen.

... Ist aber der Multiplikator eine negative Zahl, so hat die bisherige Definition kein Sinn mehr. Man muss sie durch eine neue ersetzen, die sich dem bisherigen anschmiegt und zu keinem Widerspruch führt.

Dieses Verfahren der Arithmetik bei der Aufstellung neuer Definitionen, der Erweiterung des Zahlbegriffs und der Rechnungsoperationen nannte Hermann Hankel in seiner *Theorie der komplexen Zahlensysteme*, Leipzig 1867, das Prinzip der Permanenz oder der Ausnahmslosigkeit. Euler setzt in seiner *Anleitung zur Algebra* wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren auch $(-8) \cdot (+5) = -40$, sagt dann $(-8) \cdot (-5)$ müsse entweder $+40$ oder -40 sein und da $(-8) \cdot (-5)$ nicht gleich $(-8) \cdot (+5)$ sein könne, so müsse man $(-8) \cdot (-5) = +40$ setzen. Zur Erläuterung der Multiplikationsregeln sei auch ihre geometrische Veranschaulichung mittels proportionaler Strecken auf zwei sich im Nullpunkt schneidenden Zahlenlinien, mittels der Potenz im Kreise, mittels der Flächeninhalte von Rechtecken usw. empfohlen.

FLADT KUNO, *Didaktik und Methodik*. Frankfurt, Hirschgraben, 1950, p. 53.

Das Rechnen mit absoluten und relativen Zahlen

Sinn und Zweck eines Beweises soll der Schüler heute zuerst in der Geometrie lernen und auch dort nur ganz allmählich, in der Arithmetik sieht er die « Richtigkeit » der Gesetze vermittels der geometrischen Darstellung ein, wenigstens bei den Rechenarten erster Stufe. Beim Multiplizieren treten dann die Formeln $(+a) \cdot (-b) = -ab$, $(-a) \cdot (+b) = -ab$ und gar $(-a) \cdot (-b) = ab$ auf. Dass sie im Grunde genommen unbeweisbare Grundsätze sind, kann der Schüler nicht einsehen. Nur ihre Zweckmässigkeit vermag er zu begreifen auf Grund des sogenannten Permanenzprinzips, das nichts anderes besagt, als, dass bei Einführung neuer Zahlen die seitherigen Rechengesetze womöglich alle weiter gelten sollen oder, wie sich ein berühmter Didaktiker einmal ausdrückte, « dass für neue Mitglieder des Zahlenvereins die alten Statuten gelten sollen ». Eines darf man aber auch dem Schüler der 4. Klasse nicht verschweigen, oder besser, eins muss er aus dem Unterricht des Lehrers herausfühlen : dass es ein Wunder ist, wenn tatsächlich alle Rechengesetze weiter bestehen, ein Wunder, das der Scharfsinn der Mathematiker, deren Amt die genauere Untersuchung ist, in eine Selbstverständlichkeit verwandelt hat.

HERMANN SCHUBERT, *Elementare Arithmetik und Algebra*. Leipzig, G. L. Göschensche, 1899, p. 44-45.

Ein Produkt, dessen Multiplikator null oder negativ ist, hat nach der Definition der Multiplikation keinen Sinn. Nach dem in § 8 eingeführten Permanenz-Prinzip ist einem solchen Produkte ein Sinn beizulegen, der es gestattet, dass die entwickelten Gesetze Gültigkeit behalten. Dieses Ziel erreicht man, indem man, nach § 8 und § 9, Null und negative Zahlen als Differenzen auffasst und mit ihnen genau so multipliziert, wie die rückwärts gelesene Formel II vorschreibt. So erhält man:

$$a \cdot 0 = a(b - b) = ab - ab = 0$$

$$a \cdot (-c) = a \cdot (0 - c) = a \cdot 0 - ac = 0 - a \cdot c = -(a \cdot c)$$

In Worten lauten diese Ergebnisse:

1. Durch Multiplikation einer beliebigen Zahl mit Null erhält man wieder Null.

2. Mit einer negativen Zahl multipliziert man, indem man mit ihrem absoluten Betrage multipliziert und dem erhaltenen Produkte das entgegengesetzte Vorzeichen gibt. Z. B.: $(+4)(-3) = -12$; $(-5) \cdot (-3) = +15$.

Aus dem Distributionsgesetzen geht hervor, wie multipliziert wird, wenn Multiplikandus oder Multiplikator algebraische Summen sind. Z. B. (8 Beispiele folgen):

...

$$3. a(e - f + g) = ae - af + ag$$

$$4. a(e + f - g) = ae + af - ag$$

...

$$8. (a - b - c)p = ap - bp - cp$$

Wenn Multiplikandus und Multiplikator beide algebraische Summen sind, so geschieht die Auflösung der Klammern so, wie die folgenden Formeln zeigen:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$$

$$(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$$

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Der Beweis dieser Formeln folgt aus den Distributionsgesetzen sehr leicht. Z. B.:

$$(a + b)(c - d) = a(c - d) + b(c - d) = (ac - ad) + (bc - bd) = ac - ad + bc - bd$$

Für den Fall, dass Multiplikandus und Multiplikator algebraische Summen von mehr als zwei Glieder sind, diene folgendes Beispiel:

$$(a - b + c)(p - q - r + s) = ap - aq - ar + as \\ - bp + bq + br - bs \\ + cp - cq - cr + cs$$

Demnach lässt sich folgende Regel aussprechen: Zwei algebraische Summen multipliziert man, indem man jedes Glied des einen mit jedem Gliede des andern multipliziert und dem Produkte das positive Vorzeichen gibt, wenn die beiden multiplizierten Glieder gleiche Vorzeichen hatten, dagegen das negative Vorzeichen, wenn die beiden multiplizierten Glieder ungleiche Vorzeichen hatten.

§ 8. Null

Definition der Null: $a - a = b - b = 0$.

Da nach der Definition der Subtraktion der Minuendus eine Summe ist, deren einer Summandus der Subtrahendus ist, und demgemäss grösser als dieser sein muss, so hat die Verbindung zweier gleicher Zahlen durch das Minuszeichen keinen Sinn. Eine solche Verbindung hat zwar die Form einer Differenz, stellt aber keine Zahl im Sinne des § 4 dar. Nun befolgt aber die Arithmetik ein Prinzip, das man das Prinzip der Permanenz oder der Ausnahmslosigkeit nennt, und das in zweierlei besteht:

Erstens darin, jeder Zeichen-Verknüpfung, die keine der bis dahin definierten Zahlen darstellt, einen solchen Sinn zu erteilen, dass die Verknüpfung nach denselben Regeln behandelt werden darf, als stelte sie eine der bis dahin definierten Zahlen dar;

Zweitens darin, eine solche Verknüpfung als Zahl im erweiterten Sinne des Wortes aufzufassen und dadurch den Begriff der Zahl zu erweitern.

BREIDENBACH WALTER, *Methodik des mathematischen Unterrichts*. Stuttgart, Ernst Klett Verlag, 1950, p. 119.

3. *Multiplikation*. Alle Bemühungen scheinen umsonst gewesen zu sein, wenn wir uns nun der Multiplikation zuwenden. Denn von den Aufgaben: 1. $(+a) \cdot (+b)$; 2. $(+a) \cdot (-b)$; 3. $(-a) \cdot (+b)$; 4. $(-a) \cdot (-b)$ haben 3. und 4. kein Sinn. Denn der Multiplikator bedeutet eine Anzahl, kann also keine negative Zahl sein. Die Schüler helfen sich in 3, indem sie die Faktoren naiv vertauschen. Die neue Aufgabe $(+b) \cdot (-a)$ hat einen Sinn und ihr Ergebnis $(-ab)$ wird von den Schülern ohne weiteres als das Ergebnis der Aufgabe 3 angesehen. In 4 versagt dieser Trick. Trotzdem sagen die Schüler manchmal: das gibt $(+ab)$ und weisen auf die Formel für das Produkt zweier Differenzen hin. Sie fanden damit in die richtige Gegend, können aber naturgemäss den wirklichen Sachverhalt nicht selbständig finden.

Bekanntlich sind die Lösungen für 3 und 4 Definitionen, die wir in Freiheit vornehmen können, wenn wir uns zugleich — ebenfalls freiwillig! — unter « das Gesetz » stellen (Permanenzprinzip von Hankel). Zwei solcher Gesetze bieten sich vor allem an: a) Die Formeln für $(a \pm b) \cdot (x \pm y)$ waren z. T. mit Nebenbedingungen behaftet. Es ist ökonomisch, wenn wir den Wunsch haben, dass diese Formeln unverändert auch für negative Zahlen gelten. Das läuft darauf hinaus, dass wir vor allem die Nebenbedingungen fallen lassen. Also z. B. $(a - b) \cdot (x - y) = ax - bx - ay + by$ soll nun nicht nur gelten für $a > b$, $x > y$, wofür die Formel bewiesen ist, sondern für jede beliebige Wahl der Buchstaben. Dann dürfen wir z. B. $a = 0$ und $x = 0$ setzen und finden, dass dann $(-b) \cdot (-y) = +by$ wird.

b) Ein zweites Mittel sind Multiplikationsreihen. Die Reihen

$$\begin{array}{ll} \text{A. } (+6) \cdot (+3) = +18 & \text{B. } (+6) \cdot (-3) = -18 \\ (+4) \cdot (+3) = +12 & (+4) \cdot (-3) = -12 \\ (+2) \cdot (+3) = +6 & (+2) \cdot (-3) = -6 \\ 0 \cdot (+3) = 0 & 0 \cdot (-3) = 0 \end{array}$$

führen, sofern man verlangt, dass sie nach der gleichen Gesetzmässigkeit fortgesetzt werden sollen, zu :

$$\begin{array}{ll} (-2) \cdot (+3) = -6 & (-2) \cdot (-3) = +6 \\ (-4) \cdot (+3) = -12 & (-4) \cdot (-3) = +12 \end{array}$$

also genau zu früheren Definition.

LACROIX S. F., *Elémens d'algèbre*. Paris, Courcier, 1818, N° 29, p. 43-46.

Lorsque le multiplicande contient des parties soustractives, les produits de ces parties par le multiplicateur doivent être retranchés des autres, c'est-à-dire affectés du signe —. Par exemple,

$$\begin{array}{l} \text{le produit de } a - b \\ \text{multiplié par } c \\ \hline \text{est } \quad \quad \quad ac - bc \end{array}$$

car chaque fois qu'on prendra tout entière la quantité a , qui aurait dû être diminuée de b avant la multiplication, on prendra de trop la quantité b ; le produit ac , dans lequel a tout entier est pris autant de fois que le marque le nombre c , surpassera par conséquent le produit cherché de la quantité b , prise autant de fois que le marque le nombre c , ou du produit bc : il faudra donc retrancher bc de ac , ce qui donnera comme ci-dessus, $ac - bc$.

Le même raisonnement s'appliquerait à chacune des parties soustractives du multiplicande, quel qu'en fût le nombre, et quel que fût celui des termes du multiplicateur, pourvu qu'ils fussent tous affectés du signe +. En observant que les termes qui n'ont pas de signe sont censés avoir le signe +, on voit par ces exemples que les termes du multiplicande affectés du signe + donnent un produit partiel affecté du signe +, tandis que ceux qui sont affectés du signe — en donnent un affecté du signe —. Il suit de là que lorsque le multiplicateur partiel a le signe +, le produit partiel a le même signe que le multiplicande partiel.

30. Le contraire a lieu quand le multiplicateur contient des parties soustractives; les produits formés par ces parties doivent être pris avec un signe contraire à celui qu'ils auraient, d'après la règle précédente. On s'en convaincra par l'exemple suivant.

$$\begin{array}{l} \text{Soit le multiplicande } a - b \\ \text{le multiplicateur } c - d \\ \hline \text{le produit sera } \left\{ \begin{array}{l} ac - bc \\ -ad + bd \end{array} \right. \end{array}$$

car le produit du multiplicande par le premier terme c du multiplicateur sera, par l'exemple précédent, $ac - bc$; mais en prenant c tout entier pour multiplicateur, au lieu de c diminué de d , on prend la quantité $a - b$ autant de fois de trop que le marque le nombre d ; ainsi le produit $ac - bc$ surpasses celui qu'on cherche du produit de $a - b$ par d . Or ce

dernier est, par ce qui précède, $ad - bd$; et pour le retrancher du premier, il faut en changer les signes (20) : on aura donc $ac - bc - ad + bd$ pour le résultat demandé.

31. En résumant les conséquences des exemples ci-dessus, on en conclura que la multiplication des polynômes s'effectue en multipliant successivement, selon les règles données pour les monômes (N^{os} 21-26), tous les termes du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, et en observant que si le multiplicateur partiel a le signe $+$, le produit partiel doit avoir le même signe que le multiplicande partiel, et le signe contraire, si le multiplicateur partiel a le signe $-$.

Si on développe les différents cas de cette dernière règle, on trouvera :

- 1) Qu'un terme ayant le signe $+$, multiplié par un terme ayant le signe $+$, donne un produit qui a le signe $+$.
- 2) Qu'un terme ayant le signe $-$, multiplié par un terme ayant le signe $+$, donne un produit qui a le signe $-$.
- 3) Qu'un terme ayant le signe $+$, multiplié par un terme ayant le signe $-$, donne un produit qui a le signe $-$.
- 4) Qu'un terme ayant le signe $-$, multiplié par un terme ayant le signe $-$, donne un produit qui a le signe $+$.

Ce tableau fait voir que lorsque le multiplicande et le multiplicateur partiels ont le même signe, le produit a le signe $+$, et que s'ils ont des signes différents, le produit a le signe $-$.

Abbé SAURI, *Cours complet de mathématiques*, tome premier. Paris, Ruault, 1774, p. 44-45.

Pour trouver les règles des signes, soit proposé de multiplier $5 - 2$ par $4 - 2$, je multiplie d'abord 5 par 4 (en algèbre, on commence la multiplication par la gauche), le produit est 20 , que j'écris comme on le voit; mais, parce que je ne dois pas multiplier 5 par 4 , mais seulement 5 diminué de 2 , ou $5 - 2$, j'ai pris 2 quatre fois de trop, de sorte que le produit 20 est trop grand de 8 ; donc je dois le diminuer de cette quantité en écrivant -8 à côté : de sorte que $20 - 8 = 12$ est le produit de $5 - 2$ ou de 3 par 4 . Je remarque maintenant que je ne devais pas multiplier $5 - 2$ par 4 , mais seulement par 4 diminué de 2 ou par 2 ; j'ai donc pris $5 - 2$ deux fois de trop. Pour détruire cette erreur, je multiplie $5 - 2$ par 2 , le produit est $10 - 4$, que je retranche de $20 - 8$, pour avoir $20 - 8 - 10 + 4 = 6$, vrai produit.

Corollaire. De là il suit que $++$, ou $-- = +$, et que $+-$, ou $-+ = -$, car 20 résulte de la multiplication de $+5 \times +4$, -8 résulte de $-2 \times +4$, -10 résulte de $+5 \times -2$, et $+4$ résulte de -2×-2 . Donc, lorsque le signe du multiplicande est le même que celui du multiplicateur, le produit doit avoir le signe $+$; mais il aura le signe $-$, si le signe du multiplicande est différent de celui du multiplicateur : d'ailleurs, lorsque le multiplicateur a le signe $+$, on prend le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur : ainsi le produit est égal au multiplicande pris un certain nombre de fois; donc $-2a \times +3d = -6ad$; mais pour multiplier par $-$, il faut faire le contraire, c'est-à-dire qu'il faut retrancher le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur;

par conséquent si le multiplicande est positif, le produit sera composé d'une quantité positive retranchée un certain nombre de fois; et le produit sera négatif : mais si le multiplicande a le signe —, le produit sera composé d'une quantité négative, soustraite un certain nombre de fois : ainsi le produit sera positif. D'autre côté $3 - 3$ étant multiplié par 2, donnera évidemment $6 - 6 = 0$; or $-3 \times 2 = -2 \times 3$, visiblement : donc $3 - 3 = 0$ étant multiplié par -2 donnera $-6 + 6 = 0$: donc, etc.

THOMAS MANNING, *An Introduction to Arithmetic and Algebra*. Cambridge, Benjamin Flower, 1796, p. 53.

75. When one or both of the factors are compound quantities, consisting of the excess of the sum of certain positive terms above the sum of certain negative terms, the product is truly represented by the collected products of each term of the multiplier, multiplied by each term of the multiplicand, the sign + being prefixed to the product of any two terms, that have the same sign — to the product of any two terms that have different signs. For,

1st. Let the factors be $a - b$ and c ; the quantity $a - b$, taken once, or $a - b$, is less than a by the quantity b ; and $a - b$ taken twice is less than a taken twice by the quantity $2b$; for $a - b + a - b = 2a - 2b$: in the same manner it appears that $a - b$, taken c times is less than a taken c times by the quantity bc ; but a taken c times is ac , $a - b$ taken c times is $ac - bc$, conformably to the above law.

2d. Let the factors be $a - b$ and $c + d$; by Art. 69 $a - b \times c + d = a - b \times c + a - b \times d$; but (by case 1st.) $a - b \times c = ac - bc$; and $a - b \times d = ad - bd$; $a - b \times cd = ac - bc + ad - bd = ac - bc + ad - bd$, conformably to the above law; and it is evident that the same conformity would be found, if instead of the factor $c + d$ we employed a factor consisting of more terms.

3d. Let the factors be $a - b$ and $c - d$; (by case 1st) $a - b$ taken c times is $ac - bc$; but $c - d$ is less than c by the quantity d , $\therefore c - d$ times $a - b$ is less than c times $a - b$ by the quantity d times $a - b$; i. e. by the quantity $ad - bd$; $\therefore a - b \times c - d = ac - bc - ad - bd = ac - bc - ad + bd$, conformably to the same law.

And since any compound quantity whatsoever, wherein positive and negative terms are found, may be divided into two parts, the one consisting of all the positive terms, and the other consisting of all the negative terms, these three cases establish the law universally.

76. Hitherto the reasoning has been confined to real quantities, i. e. either to simple positive quantities, consisting of positive terms only, or to compound quantities, the sum of whose positive terms exceed the sum of their negative terms : but it is evident that the definition of multiplication serves equally to determine the product of any imaginary quantity, when multiplied by a real quantity.

Thus if $-a$ be conceived as a quantity, the double of $-a$, or $-a$ multiplied by 2, will be designated by a negative quantity twice as great, i. e. by $-2a$; the triple of $-a$, or $-a \times 3$ will be designated by $-3a$; and, in general, n times $-a$ will be designated by $-na$.

77. The same law which obtains when both factors are positive, serves also for determining the product arising from any negative multiplicand.

For let the multiplicand, whether it be simple or compound, be equal to $-A$; and let the multiplier be equal to B ; then, because from the application of this law to any multiplicand the same product results as from the application of it to that multiplicand with the sign of each term changed, except that in the latter product, the sign of each term will be found changed, it follows that, since, if we change the signs of the negative multiplicand, thereby making it equal to $+A$, and then multiply it by B , according to that law, the result will be equal to AB , therefore, if we multiply this negative multiplicand by B , according to that law, the result will be equal to $-AB$.

Thus, if $a - b = -n$, and consequently $b - a = n$, since $b - a \times c$ ($= nc$) is $bc - ac$, it follows that $a - b \times c$ (which is $-nc$) is $ac - bc$, determined by the same law.

78. Article 76 determines what the product of a negative multiplicand must be, when multiplied by any real quantity; and in art. 77, it is shewn that such product is always to be obtained by the application of the law in art. 75; but neither from them, nor from the preceding articles, can any thing be deduced, proving what the product of any quantity, real or imaginary may be, when multiplied by a negative quantity, since whatsoever number of terms a quantity be taken, that number cannot possibly be other than a real positive number; or in other words, the definition of multiplication does not include negative multipliers.

Nevertheless; from the consideration of the nature and analogies of multiplication, if operations with abstract negative quantities be allowed, this may be determined — viz. what definition of multiplication by negative quantities, will be most convenient for algebraical operations.

79. Suppose that in the solution of some problem, it should seem expedient to multiply some quantity c by a compound quantity $x - y$, where it is not known whether x or y be the greater, if x be the greater, the product is $cx - cy$, determined by the above law. Unless therefore $cx - cy$ be allowed to be the product in either case, the operation would be at a stand; let us consider, then, what will be the result of extending this law to all cases of negative multipliers, and whether the products, so determined, will, when the multipliers are compound, agree with products which arise from the application of the same law, when simple negative quantities, of equal value, are substituted in the room of these compound multipliers.

First, let the multiplicand, whether simple or compound, be a positive quantity and equal to A ; and let the multiplier whether simple or compound, be equal to $-B$: Then, it can make no difference in the result, whether A be considered as the multiplicand, and $-B$ the multiplier, or $-B$ be considered as the multiplicand, and A the multiplier, provided that the products be determined in both cases by the above law, and that $-B$ multiplied by A , according to that law, produces a quantity equal to $-AB$, it follows that A multiplied by $-B$, according to that law, produces a quantity equal to $-AB$.

Thus if $a - b = -n$, c multiplied by $a - b$, according to that law, produces $ac - bc = ac - ac - nc = -nc$, the product of c multiplied by $-n$, according to the same law.

Secondly, let the multiplicand be a negative quantity, and equal to $-A$; and let the multiplier be equal to $-B$: then, since if we change the sign of each term of the multiplier, thereby making it equal to $+B$, and then multiply according to the above law, the product will be equal

to $-AB$, and that if we multiply by any quantity, and afterwards by that quantity with all its signs changed, still observing the same law, the two products will be of the same terms, but with changed signs, it follows, that if, according to the above law, we multiply a negative multiplicand equal to $-A$, by a negative multiplier equal to $-B$, the result will be equal to $+AB$.

Thus, if $a - b = -n$, since c multiplied by $a - b$ is $ac - bc = nc$, $-c$ multiplied by $a - b$, by the same law, is $bc - ac = +nc$, the product of $-c$ multiplied by $-n$, according to the same law.

80. It appears then, that if we determine the product of any multiplicand whatsoever, when multiplied by a negative multiplier, by the above law, the products, when the multiplicand and multiplier, one or both, be compound, will be the same as would result from the application of the same law to simple quantities of equal value, substituted in the room of these compound quantities.

81. Moreover it appears that such multiplication by negative quantities may be defined

« Substracting the multiplicand ¹, as often as there are units in the multiplier. »

For $-AB$, the product of A into $-B$, is A substracted as often as there are units in B ; and $+AB$, the product of $-A$ into $-B$, is $-A$ substracted as often as there are units in B .

82. It is to be observed, that $\pm A$ multiplied into $-B$, the product being determined as above, is equal to $-B$ multiplied into $\pm A$, analogous to the property of real factors.

83. There are other analogies to be derived from algebraical operations, shewing that, if multiplication by abstract negative quantities be allowed, the above definition must necessarily be admitted; but as they cannot be anticipated, we may conclude this discussion with observing that, if the above reasonings were nugatory, yet if such a definition of multiplication by negative quantities be assumed (and such an assumption is by all writers on algebra, who admit abstract negative quantities, either made or implied) whatever deductions be fairly drawn from it, can cause no error to arise in algebraical computations.

84. The result of the above remarks on multiplication, so far as concerns practice, is contained in the following

Universal Rule for Multiplication,

Multiply every term of the multiplicand by each term of the multiplier, one after another, prefixing $+$ to the product of any two terms, that have like signs, and $-$ to the product of any two terms that have unlike signs, collect all the products into one sum; that sum is the product required.

Note. It is convenient to arrange the terms in such a manner, that like terms in the product may stand one under the other; in order that such terms may readily be collected together for the final expression.

Examples

Traité d'algèbre. Traduit de l'Anglois de M. Maclaurin, avec des augmentations tirées des Mathématiciens les plus célèbres. Paris, Antoine Jambert, 1758, p. 6-8.

¹ Considered abstracted from its sign.

Multiplication

12. Il y a trois règles à observer pour la Multiplication Algébrique celle des signes, celle des coefficients et celle des lettres.

Règle des signes

13. Quand le terme du multiplicateur a le signe +, on conserve à son produit les signes du multiplicande, et quand il a le signe —, on change dans le produit tous les signes des termes du multiplicande.

Démonstration : 1° Quand le terme du multiplicateur est positif, on prend le multiplicande positivement, c'est-à-dire tel qu'il est, autant de fois qu'il y a d'unités dans le terme du multiplicateur.

2° Quand le terme du multiplicateur est négatif, on prend tous les termes du multiplicande négativement autant de fois qu'il y a d'unités dans le terme du multiplicateur.

Règle des coefficients

14. Les coefficients étant des nombres, il faut multiplier ceux du multiplicande par ceux du multiplicateur, suivant les règles de la Multiplication Arithmétique.

Règle des lettres

15. Il faut les écrire de suite comme si on voulait faire un mot. Et quoique l'arrangement diffère qu'on peut leur donner, ne change point la valeur du produit, parce que la valeur des lettres ne dépend point, comme celle des chiffres, du rang qu'elles occupent, cependant il est bon pour plus grande netteté de les ranger suivant l'ordre alphabétique.

Cette règle ne se démontre pas, parce qu'elle n'est que convention.

Règle générale

On prend successivement chaque terme du multiplicateur, par lequel on multiplie tous les termes du multiplicande, selon les trois règles précédentes, et après avoir trouvé tous les produits partiels, on en fait l'addition.

Exemples

16. Pour éclaircir davantage la règle des signes, qui est la seule qui puisse causer quelque embarras dans cette opération, soit $a - b \times c - d$: je multiplie d'abord $a - b$ par c , et j'ai au produit $ac - bc$, ce qui ne souffre aucune difficulté, puisque je ne fais que prendre la quantité positive a , et la quantité négative b , autant de fois qu'il y a d'unités dans c ; or le produit $ac - bc$ est trop grand, puisque je n'avais point à multiplier par c tout entier, mais seulement par $c - d$, il faut donc, du produit trouvé, soustraire le produit du multiplicande par d ; or pour soustraire, il faut changer les signes de la quantité soustraite; donc en multipliant par $-d$, il faudra changer au produit tous les signes du multiplicande, et par conséquent $a - b \times c - d = ac - bc - ad + bd$.

(Voir p. 6 et p. 4, expl. de la soustraction et des nombres négatifs.)

On pourroit de là déduire la règle des signes telle qu'on a coutume de l'énoncer, qui est que les signes semblables dans les termes du multiplicateur et du multiplicande donnent + au produit, et les signes différents donnent —. Nous avons évité cette manière de présenter la règle, pour épargner au Commencans l'expression révoltante — par — donne

+, qui est cependant une conséquence nécessaire de la règle : on peut, comme nous avons fait, la déguiser, mais non l'anéantir ou la contredire ; le Lecteur, sans s'en apercevoir, en a observé tout le sens dans les exemples précédents, familiarisé avec la chose, pourroit-il encore s'effaroucher des mots ? S'il lui reste là-dessus quelque scrupule, qu'il fasse attention à la démonstration suivante qui attaque directement la difficulté.

+ $a - a = 0$, ainsi par quelque quantité qu'on multiplie + $a - a$, le produit doit être 0 : si je le multiplie par n , j'aurai pour le premier terme + na , donc j'aurai pour le second $-na$, puisqu'il faut que les deux termes se détruisent. Donc les signes différens donnent — au produit. Si je multiplie + $a - a$ par $-n$, par le cas précédent, j'aurai $-na$ pour premier terme ; donc j'aurai + na pour second, puisqu'il faut toujours que les deux termes se détruisent ; donc — multiplié par — donne + au produit.

COLIN MACLAURIN, M. A., *A Treatise of Algebra*. London, A Millar and J. Dourse, 1748. Chap. IV : *Of Multiplication* (p. 12-16).

N. 11. In Multiplication the General Rule for the Signs is, That when the signs of the Factors are like (i. e. both +, or both —), the Sign of the Product is + ; but when the Signs of the Factors are unlike, the Signs of the Product is —.

Case I. When any positive Quantity, + a is multiplied by any positive Number, + n ; the Meaning is, That + a is to be taken as many times as there are Units in n ; and the Product is evidently na .

Case II. When — a is multiplied by n , then — a is to be taken as often as there are Units in n , and the Product must be $-na$.

Case III. Multiplication by a positive Number implies a repeated Addition : But Multiplication by a Negative implies a repeated Subtraction. And when + a is to be multiplied by $-n$, the Meaning is that + is to be subtracted as often as there are Units in n : Therefore the Product is negative, being $-na$.

Case IV. When — a is to be multiplied by $-n$, then — a is to be subtracted as often as there are Units in n ; but (by N. 10) to subtract — a is equivalent to adding + a , consequently the Product is + na .

The II and IV cases may be illustrated in the following Manner.

By the Definitions, + $a - a = 0$; therefore, if we multiply + $a - a$ by n , the Product must vanish or be 0, because the Factor $a - a$ is 0. The first term of the Product is + na (by case I) Therefore the second Term of the Product must be $-na$ which destroys + na ; so that the whole Product must be + $na - na = 0$. Therefore — a multiplied by + n gives $-na$.

In like manner, if we multiply + $a - a$ by $-n$, the first Term of the Product being $-na$, the latter Term of the Product must be + na , because the two together must destroy each other, or their Amount be 0, since one of the factors (viz. $a - a$) is 0. Therefore — a multiplied by $-n$ must give + na .

In this general Doctrine the Multiplier is always considered as a Number : A Quantity of any kind may be multiplied by a Number : but a Pound is not to be multiplied by a Pound, or a Debt by a Debt, or a Line by a Line.

L. GROSGURIN, *Algèbre*. Collège de Genève, 1936, p. 22.

2^o Multiplication en nombres algébriques

96. Soit l'addition

$$\begin{aligned} (+4) + (+4) + (+4) &= \\ &= 4 + 4 + 4 = +12 \end{aligned}$$

Notation abrégée :

$$(+4) \cdot (+3) = +12$$

signifie :

(+4) ... 3 fois en addition

Soit la suite de soustractions

$$\begin{aligned} -(+4) - (+4) - (+4) &= \\ &= -4 - 4 - 4 = -12 \end{aligned}$$

Notation abrégée :

$$(+4) \cdot (-3) = -12$$

signifie : (+4) ... 3 fois soustrait

de même :

$$\begin{aligned} (-4) + (-4) + (-4) &= \\ &= -4 - 4 - 4 = -12 \end{aligned}$$

$$(-4) \cdot (+3) = -12$$

signifie :

(-4) ... 3 fois en addition.

De même :

$$\begin{aligned} -(-4) - (-4) - (-4) &= \\ &= 4 + 4 + 4 = +12 \end{aligned}$$

$$(-4) \cdot (-3) = +12$$

signifie : (-4) ... 3 fois soustrait.

Résumons ces quatre multiplications :

$$\begin{aligned} (+4) \cdot (+3) &= +12 \\ (-4) \cdot (-3) &= +12 \\ (-4) \cdot (+3) &= -12 \\ (+4) \cdot (-3) &= -12 \end{aligned}$$

On en déduit cette *règle des signes de la multiplication* :

Pour obtenir le produit de deux nombres algébriques, on donne au produit de leurs valeurs absolues :

le signe + si les deux nombres sont de même signe ;

le signe - si les deux nombres sont de signes contraires.

ANDRÉ SPICHER, *Eléments d'algèbre*. Genève, P.-E. Grivet, 1944, p. 27.

Multiplication des nombres algébriques

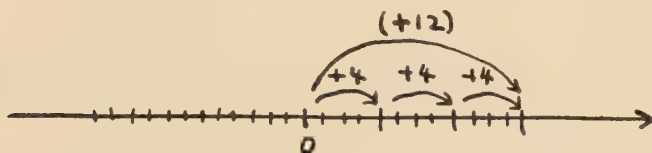
Premier cas :

Le multiplicateur (nombre de fois) est positif.

« Définition » : Multiplier un nombre algébrique par un multiplicateur positif (+3) par exemple, c'est compter trois fois ce nombre dans « son sens propre ».

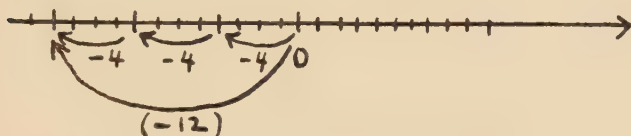
Exemple :

$$(+3) \cdot (+4) = (+4) + (+4) + (+4) = +4 + 4 + 4 = +12$$



Exemple :

$$(+3) \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -4 - 4 - 4 = -12$$



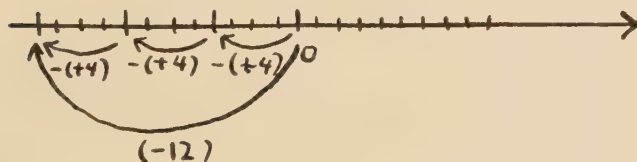
Deuxième cas :

Le multiplicateur est négatif.

« Définition » : Multiplier un nombre algébrique par un multiplicateur négatif (-3) par exemple, c'est compter trois fois ce nombre dans le sens contraire à son sens propre.

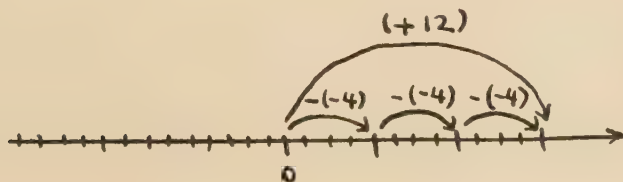
Exemple :

$$(-3) \cdot (+4) = -(+4) - (+4) - (+4) = -4 - 4 - 4 = -12$$



Exemple :

$$(-3) \cdot (-4) = -(-4) - (-4) - (-4) = +4 + 4 + 4 = +12$$



En résumé, on a donc :

$$(+3) \cdot (+4) = +12$$

$$(+3) \cdot (-4) = -12$$

$$(-3) \cdot (+4) = -12$$

$$(-3) \cdot (-4) = +12$$

On en déduit la règle suivante (règle des signes pour la multiplication) :

Règle :

Le produit de deux facteurs de même signe est positif (1^{re} et 4^e lignes ci-dessus).

Le produit de deux facteurs de signes contraires est négatif (2^e et 3^e lignes).

On résume parfois cette règle en disant :

(+) multiplié par (+) donne +

(-) multiplié par (-) donne +

(+) multiplié par (-) donne -

(-) multiplié par (+) donne -

W. LIETZMANN, *Methodik des mathematischen Unterrichts*. VII. Band, 2 Teil. Leipzig, Quelle u. Meyer, 1916, p. 273-275.

Ganz Ähnliches wie über die Addition und Subtraktion der negativen Zahlen lässt sich über die Multiplikation und Division mit ihnen sagen. Die vier Multiplikationsregeln :

$$1. \quad (+a) (+b) = +ab$$

$$2. \quad (-a) (+b) = -ab$$

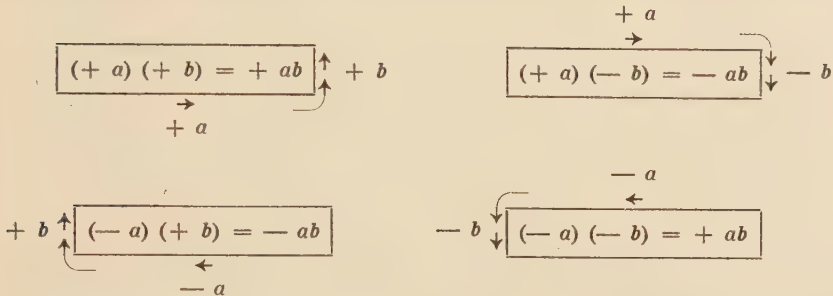
$$3. \quad (+a) (-b) = -ab$$

$$4. \quad (-a) (-b) = +ab$$

sind Definitionsgleichungen, deren Zweckmässigkeit sich aus der Regel von der Multiplikation zweier zweigliedriger Polynome ergibt. Ob man auch die erste der vier Formeln als eine neue Definition anspricht, wird wieder davon abhängen, ob man die positiven Zahlen als die ursprünglichen natürlichen Zahlen ansieht oder nicht.

Etwas schwieriger liegen aber nun die Dinge mit der *Erklärung* dieser Definition. Wie gesagt, wenn man sich lediglich auf das Permanenzgesetz beruft, ist alles schön und gut. Wenn man nun aber wie bei den Rechenoperationen erster Stufe nach einer Veranschaulichung sucht, so entstehen Schwierigkeiten, die zwar durchaus überwunden werden können, die aber doch für die Mittelklassen wahrscheinlich so gross sind, dass man vielfach auf die Veranschaulichung verzichtet. Stellen wir die Faktoren als Strecken dar, so sind, wie früher benutzt worden, die Produkte als Inhalte von Rechtecken darzustellen. Negative Strecken haben wir vorin bei der Veranschaulichung der Addition und Subtraktion benutzt. Nun aber müssen wir auch Flächen haben, die von positiven und negativen Strecken begrenzt sind. Das geht bekanntlich sehr gut. In der analytischen Geometrie wird man davon zu sprechen

haben (hier genügen wohl die beigegeführten schematischen Figuren). Aber ich rate davon ab, mit Vorzeichen versehene Flächen schon in der Untertertia zu benutzen.



Ein anderer Weg ist der folgende: Man stellt zunächst eine Gerade $y = (+ 3) x$ graphisch dar. Das liefert für positives x einen Strahl. Vervollständigt man diese Halbgerade zur Geraden, so besagt diese Art der Erweiterung der Operation der Multiplikation von positiven x auf negatives x , dass das Produkt negativ wird. Ebenso zeigt man an der Geraden $y = (- 3) x$ die Zweckmässigkeit der Multiplikation zweier negativen Zahlen. — Diese Methode (vgl. dazu S. 359 und die Figuren 85 bis 88) setzt natürlich voraus, dass die Schüler bereits mit der graphischen Darstellung linearer Funktionen im ersten Quadranten vertraut sind, eine Annahme, die kaum je gemacht werden darf. Immerhin ist es recht beachtenswert, in welcher Form das Permanenzprinzip hier bei der graphischen Darstellung in der Erscheinung tritt.

Aber versuchen wir, die Dinge rein arithmetisch plausibel zu machen. Von den vier Formeln ist die erste aus dem früheren klar, die zweite besagt nach der Definition der Multiplikation, wenn ich diese jetzt auch auf negative Summanden übertrage, dass die negative Zahl $- a b$ als Summand zu setzen ist. Das liefert als Ergebnis $- a b$. Die Erweiterung gegen früher besteht nur darin, dass ich jetzt in der Erklärung der Multiplikation auch negative Summanden zugelassen habe. Bei der Formel 3 versagt aber zunächst unsere Kunst. Ich kann nicht irgendeine Zahl, sei sie positiv oder negativ $(- a)$ mal als Summand setzen; mit der bisherigen Erklärung der Multiplikation ist also nicht auszukommen. Ich kann mir aber hier anders helfen. Ich setze fest, dass meine Definition jedenfalls so eingerichtet werden muss, dass das kommutative Gesetz der Multiplikation erhalten bleibt. Dann ist $(+ a) \cdot (- b) = (- b) \cdot (+ a)$, und das ich nach dem eben Gesagten $- ab$. Wie ist also die Multiplikation mit einer negativen Zahl ausgeführt? Es ist mit der positiven Zahl multipliziert und das Ergebnis mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen worden. So machen wir es jetzt auch mit der Erklärung der vierten Formel. Wieder erweitern wir uns eben bei positiven Multiplikanden erhaltenes Ergebnis auf den Fall, wo ein negativer Multiplikand da ist. Wir multiplizieren erst mit dem positiven Wert und erhalten $- ab$ und geben dann dem Ergebnis das entgegengesetzte Vorzeichen.

So entnimmt man dieser Entwicklung, dass einmal immer neue Festsetzungen beim Fortschreiten von einer zu anderer Formel getroffen werden müssen, weiter aber, dass diese Festsetzungen alle in der Aus-

dehnung bereits bekannter Gesetze bestehen. Wenn der Rechenunterricht früher bei den Brüchen in der Weise vorgegangen ist, wie wir es (S. 50) empfohlen haben, wird den Schülern dieser Gedankengang nicht schwer fallen.

Dem und jenem wird diese Entwicklung vielleicht zu abstrakt klingen. Er zieht vielleicht die folgende vor: Man bilde die Reihe $a \cdot 3$, $a \cdot 2$, $a \cdot 1$, $a \cdot 0$, setze sie in gleicher Weise fort und nenne die zugehörigen Produkte $a \cdot (-1)$, $a \cdot (-2)$, usw. Ebenso bilde man nachher die Reihe $(-a) \cdot 3$, $(-a) \cdot 2$, $(-a) \cdot 1$, $(-a) \cdot 0$ und setze sie in gleicher Weise fort — d. h. also addiere jeweilig a —, dann nenne man die zugehörigen Produkte $(-a) \cdot (-1)$, $(-a) \cdot (-2)$. Diese Methode der Reihenbildung, die in gleicher Weise ausserordentlich häufig bei der Ausdehnung des Potenzbegriffes von positiven auf negative Exponenten angewandt wird, pflegt den Schülern sehr plausibel zu sein; sie deckt sich im Grunde mit der oben erwähnten graphischen Methode. Es liegt nur die Gefahr vor — und auch Lehrbücher sind ihr früher vielfach verfallen —, dass diese Form der Anwendung des Permanenzgesetzes als ernstliches Beweismittel angesehen wird. Man durchschaut hier nach meiner Ansicht nicht so klar den arithmetischen Charakter der einzelnen Festsetzungen.

P. 359-360

... Dem Schüler machen erfahrungsgemäss die Regeln über die Multiplikation relativer Zahlen immer viele Schwierigkeiten. Noch später fehlt es vielfach am Begreifen, wenn die Anwendung schon eine ganz sichere ist. Wenn die Ableitung dieser Regeln auf der Tagesordnung steht, ist zumeist die graphische Darstellung der linearen Funktion dem Schüler noch nicht bekannt. Man will natürlich erst mit negativen Zahlen rechnen können, ehe man sich in die Zahlen ebene mit ihren negativen Ordinaten und Abszissen begibt. Wenn nur aber einige Zeit später die Darstellung der Funktion $y = mx$ behandelt wird, so sollte man sich nicht die Möglichkeit entgehen lassen, jene Regeln noch einmal zu beleuchten, etwa in der Weise, wie wir es S. 274 kurz angedeutet haben. Der graphische Ausdruck für die Multiplikationsregeln

$$\begin{aligned} m \cdot (-x) &= -mx \\ (-m) \cdot (-x) &= +mx \end{aligned}$$

ist dann der, dass wir die Funktion $y = mx$, wo m positiv ist, durch Fig. 85, nicht durch Fig. 86 darstellen, ebenso, wenn m negativ ist, nicht durch Fig. 88, sondern durch Fig. 87.



Fig. 85



Fig. 86

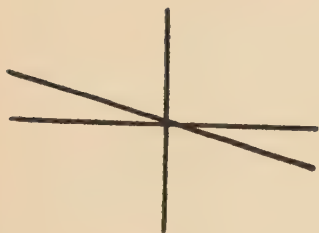


Fig. 87



Fig. 88

WERNER RENNEBERG, *Minus mal minus ist plus*. Berlin-Leipzig, « Die neue Schule », 2. Jahr, Nr. 14. Volk und Wissen, 1947, p. 513.

Eine heikle Stelle der Schulmathematik, wo es gilt, den psychologisch richtigen Weg zu finden, ohne sich über den logischen Aufbau der Mathematik ganz hinwegzusetzen, bildet das Produkt zweier negativer Zahlen. Die ältere Zahlentheorie rechnete mit negativen Zahlen nicht wie mit selbständigen Grössen, sondern nur in Verbindung mit hinreichend grossen positiven Zahlen. Unter dieser Voraussetzung finden wir dort bewiesen, dass das Produkt zweier negativer Zahlen positiv ist. Heute dagegen ist es üblich, die Gleichung

$$(-a) \cdot (-b) = +ab \quad (1)$$

als zweckmässig gewählte Festsetzung (Definition) anzusehen. Als solche bedarf sie keines Beweises, sie ist ein Axiom, d. h. ein Grundsatz, der nicht bewiesen wird. *Zweckmässig* bedeutet hier folgendes: Von den negativen Zahlen verlangen wir, dass für sie alle Rechenvorschriften, die für positive Zahlen Geltung haben, erhaltenbleiben (Prinzip der Permanenz der formalen Rechengesetze von Hankel (1839 bis 1873). Es müssen — wie Max Simon, ein Methodiker des mathematischen Unterrichts, vor einigen Jahrzehnten gesagt hat — die neu aufgenommenen Mitglieder eines Vereins sich den gleichen Bestimmungen fügen wie die alten Mitglieder.

Sich in der Schule auf Gleichung als Definition beschränken und diese auswendig lernen lassen, hiesse, in die im 16. Jahrhundert übliche Methode mathematischer Unterweisung zurückfallen: *Thu ihm also und kump recht* (Adam Riese).

Denn für den Vierzehnjährigen, dem wir einen axiomatischen Aufbau der Arithmetik nicht begreiflich machen können, bleibt Gleichung (1) ein Rezept ohne Begründung. Geweckte Jungen verlangen aber von sich auch nach einem *Beweis*, dass minus mal minus plus ist. So müssen wir Erläuterungen geben, deren Ziel Verständnis der Beziehung (1) ist. Wir dürfen aber weder uns selbst noch unsere Schüler täuschen, es sind keine *Beweise*, sondern Begründungen für die Zweckmässigkeit der Definition. Auch in höheren Klassen der Einheitsschule können wir bei Gelegenheit auf das Produkt negativer Zahlen zurückkommen und es dann mit neuen Mitteln erläutern. Im folgenden zeigen wir, wie man etwa das Produkt zweier negativer Zahlen einführen und plausibel machen kann. Die Erklärungen sind ungefähr nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet.

A. Einführung :

$$(+3) \cdot (+4) = +12 \quad (2a)$$

bedeutet nur eine neue Schreibweise für Altbekanntes.

$$(-3) \cdot (+4) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12 \quad (2b)$$

ergibt sich aus der Erklärung der Multiplikation als fortgesetzte Addition.

$$(+3) \cdot (-4) = (-4) \cdot (+3) = -12 \quad (2c)$$

führt auf den vorangehenden Fall (2b) zurück, indem wir fordern, dass für negative Zahlen das Gesetz der Vertauschbarkeit der Faktoren (kommutatives Gesetz der Multiplikation, z. B. $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$) erhalten bleibt.

Aus dem Vergleich von (2c) mit (2a) sehen wir, dass der Wert des Produktes das Vorzeichen umkehrt, wenn — bei positiven Multiplikanden (+3) — der positive Multiplikator (+4) durch den negativen (—4) ersetzt wird. Soll dies auch bei negativem Multiplikanden (—3) gelten, so muss

$$(-3) \cdot (-4) = +12$$

sein.

E. Erläuterungen :

1. Die Reihenbildung, die in der sechsten Klasse bei der Division durch einen Bruch angewandt wird, leistet auch hier gute Dienste. Wir schreiben die Folge

$$(-5) \cdot (+3); (-5) \cdot (+2); (-5) \cdot (+1); (-5) \cdot 0; (-5) \cdot (-1); \dots$$

Der Wert des Produktes nimmt Schritt für Schritt um 5 zu :

$$-15; -10; -5; 0; \dots$$

Daraus schliessen wir, dass

$$(-5) \cdot (-1) = +5$$

ist.

2. Um die Zweckmässigkeit der Festsetzung *Minus mal minus gibt plus* zu zeigen, multiplizieren wir zwei passende Klammern auf verschiedene Weisen. Es ist beispielsweise

$$(9 - 2) \cdot (5 - 3) = 45 - 10 - 27 + (-2) \cdot (-3) = 8 + (-2) \cdot (-3)$$

Andererseits können wir rechnen

$$(9 - 2) \cdot (5 - 3) = 7 \cdot 2 = 14$$

Würden wir $(-2) \cdot (-3)$ gleich (-6) setzen, so ergäbe sich als Produkt der beiden Klammern $(+2)$. Nur wenn wir erklären

$$(-2) \cdot (-3) = +6$$

stimmen die nach zwei verschiedenen Verfahren gefundenen Lösungen überein.

3. Die Schüler wollen die negativen Zahlen in Verbindung mit der Wirklichkeit sehen. Das ist mittels Thermometer, Pegel, Gradnetz und dgl. möglich. Beim Rechnen mit negativen Zahlen bietet aber schon die Subtraktion Schwierigkeiten, erst recht die Multiplikation. Zur Erläuterung der Subtraktion erzählen wir folgende Geschichte.

Fritz hat in seiner Börse 3 RM. Er hat aber bei seiner Mutter 3 RM. Schulden, so dass er eigentlich 0 RM. in der Börse hat. Nun bezahlt der gute Onkel Kurt Fritzens Schulden, er nimmt 3 RM. Schulden weg, wir schreiben: $-(- 3) = + 3$.

Und das Ergebnis? Fritz hat jetzt wirklich 3 RM. in der Börse. In der Sprache der Mathematik

$$-(- 3) = + 3$$

(3) lässt sich zu einer zweiten Erläuterung des Produktes negativer Zahlen erweitern. Eine Zahl mit (-1) multiplizieren, bedeutet die Zahl einmal wegnehmen. Das soll für negative Zahlen ebenso wie für positive gelten. Also

$$(-3) \cdot (-1) = -(- 3)$$

Aus (3) und (4) folgt

$$(-3) \cdot (-1) = + 3$$

Für andere Multiplikatoren:

$$(-3) \cdot (-4) = (-3) \cdot (-1) \cdot (+4) = (+3) \cdot (+4) = + 12$$

4. Jetzt zeigen wir einmal umgekehrt, dass die andere denkbare Festsetzung $(-3) \cdot (-4) = - 12$ nicht zweckmässig wäre. Wir stellen zusammen:

$$(-3) \cdot (+4) = - 12 \quad (2 \text{ b})$$

$$(-3) \cdot (-4) = - 12 \quad (2 \text{ e})$$

Dann hätte die Gleichung

$$(-3) \cdot x = - 12$$

zwei Lösungen, nämlich $x_1 = + 4$ und $x_2 = - 4$. Diese Schwierigkeit vermeiden wir, wenn wir die Festsetzung (1) beibehalten. Nun aber schnell (2 e) durchstreichen oder besser weglöschen, damit sich nicht einige Schüler gerade diese Gleichung einprägen!

5. Die folgende Erklärung gründet sich auf das distributive Gesetz der Multiplikation, das in der Schulmathematik geometrisch erläutert wird (Abbl.):

$$a (b + c) = ab + ac \quad (5 \text{ a})$$

$$\text{bzw. } a (b - c) = ab - ac \quad (5 \text{ b})$$

Setzen wir in (5 b) $a = (-n)$ und $c = b$, so wird

$$(-n) \cdot (b - b) = (-n) \cdot b + (-n) \cdot (-b)$$

Nun ist $(-n) \cdot b = -nb$. Da die linke Seite gleich 0 ist, muss auch die rechte Seite gleich 0 sein. Daraus folgt

$$(-n) \cdot (-b) = + nb$$



Das distributive Gesetz der Multiplikation.

Bei dieser Darstellung erscheint (1) nicht selbst als Axiom sondern als Folgerung aus dem Rechengesetz (5).

6. Eine Erläuterung des Satzes *Minus mal minus gibt plus* mit Hilfe von Flächen wird geometrisch veranlagte Schüler stärker ansprechen. Wir rechnen zunächst

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + (-b) \cdot (-b)$$

Das bedeutet geometrisch: Von dem grossen Quadrat a^2 behalten wir das kleine Quadrat $(a - b)^2$ übrig, wenn wir die zwei Rechtecke $a \cdot b$ wegnehmen (Abb. 2). Dies ist aber nun dann möglich, wenn wir b^2 einmal hinzufügen, denn b^2 wird zweimal überdeckt. Daraus folgt

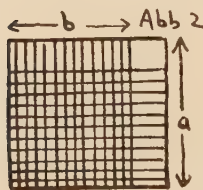


Abb. 2

Geometrische Erläuterung des Produktes zweier negativer Zahlen.

$$(-b) \cdot (-b) = +b^2$$

7. In der 8. Klasse sind graphische Darstellung und lineare Funktion zu behandeln. Bei dieser Gelegenheit können wir abermals auf das Produkt negativer Zahlen eingehen! Wir zeichnen das Bild der Gleichung

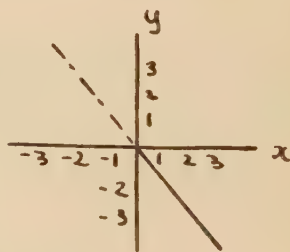
$$y = (-2) \cdot x$$

mit Hilfe der Wertetabelle

x	0	1	2
y	0	-2	-4

Abb. 3.

Erläuterung des Produktes zweier negativer Zahlen mit Hilfe der Funktion $y = (-2)x$



Nun verlängern wir die Halbgerade über 0 hinaus (Abb. 3). Jetzt sehen wir, dass sich für negative x -Werte positive y -Werte ergeben. Mithin ist beispielsweise

$$+2 = (-2) \cdot (-1)$$

8. Eine Begründung der Regel *Minus mal minus ist plus* können wir schliesslich auch in der analytischen Geometrie in der 11. Klasse

geben. Bei der Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreiecks aus den Koordinaten der Ecken nach der Formel

$$F = \frac{1}{2} x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)$$

zeigt sich, dass dieser einen positiven Wert erhält, wenn die Fläche beim Umlauf und das Dreieck zur Linken bleibt, dagegen negativ ist, wenn sie zur Rechte liegt (Abb. 4).

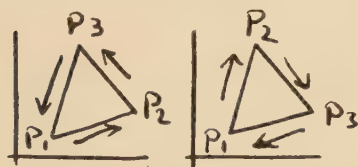


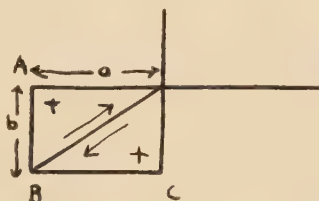
Abb. 4.

Das Vorzeichen der Fläche eines Dreiecks.

Nun betrachten wir das Rechteck $OABC$ (Abb. 5).

Abb. 5.

Erläuterung des Produktes zweier negativer Zahlen in der analytischen Geometrie.



Wir können es in die Dreiecke OAB und OBC zerlegen. Der Inhalt beider Dreiecke hat einen positiven Wert, folglich auch die Fläche des Rechtecks. Da OB zweimal durchlaufen wird, und zwar in entgegengesetztem Sinne, wird das Rechteck in der Reihenfolge der Ecken $OABC$ umlaufen. Demnach ist

$$(-a) \cdot (-b) = +ab$$

Die angeführten Beispiele mögen dazu beitragen, dass die Nachdenklichen unter unseren Schülern nicht so unbefriedigt sind, wie wenn ihnen die Gleichung (1) als Definition ohne Begründung dargeboten wird. Andererseits bleiben wir ehrlich — es erweckt nicht den Anschein, als ob die landläufige Meinung, in der Mathematik kann man alles beweisen, auch für die Grundlagen uneingeschränkt Geltung habe.

VERA SANFORD, *Notes on the history of mathematics*. New-York, State Teachers College, Oneonta. « The Mathematics Teacher », vol. XLIV, N° 4, April 1951.

The Rule of Signs in Multiplication

The recent discussion ¹ of the rules for determining the sign of the product of two signed numbers suggested a study of the ways in which this question has been treated in algebras in the past. A problem of this type does not merit an exhaustive investigation. The question is how

¹ See VAN EUGEN, H., *On Understanding Mathematical Methods*. The Mathematics Teacher, December 1950, p. 397-444.

have various authors gone about the task of making this rule reasonable to the reader. The volumes chosen for the study were simply those that happened to be at hand : several of them were very influential; others were perhaps a bit obscure.

In some, a simple enunciation of the rules is all that is given. An example of this occurs in Sir Isaac Newton's *Universal Arithmetick*, the quotation being from the second edition in English (London 1728).

Simple Algebraick Terms are multiply'd by multiplying the Numbers into the Numbers, and the Species into the Species, and by making the Product Affirmative, if both the Factors are Affirmative, or both Negative; and Negative if otherwise.

François Legendre's, *Arithmétique en sa Perfection* (first printed in 1656 and reprinted in many editions the last being in 1812) devoted a few pages to a summary of algebra in which the rules for the signs of the product of two quantities are called « maximes »:

Quand on multiplie P par P , il vient plus.

Multipliant M par M , il vient P .

Multipliant M par P ou P par M , le produit est toujours M .

Edward Hatton is more explicit in his work *An Intire System of Arithmetic* (London 1721, 3rd edition, 1753).

The Reason of the General Rule for Multiplication :

1st — Multiplication being nothing but the Work of many additions, it follows that — ab being added to — ab , is — $2 ab$ which is the same as multiplying — ab by 2; and so — gh — $2 gh$ — $3 gh$ added is equal to — $6 gh$ which shows that the Negative Quantity — gh by the Affirmative 6 must give the Negative — $6 gh$ and the like Reason holds for any other Negative by a positive Quantity.

2nd. — And as in *Logic*, two Negatives make an Affirmative; so in *Algebra* one Negative Number or Quantity multiplied by another Negative produceth an Affirmative; For the Sign — being directly contrary to +, must make a Product of a direct contrary Nature when the Multiplier is —, then (as above) when it is +; as subtracting a Negative, is adding really so much as we seem to subtract, as — 2 from 4 is 6.

John Ward's *Young Mathematicians Guide* (London, 1707; 1758 ed.) goes into more detail. The author announces the rules and then says.

That + into + will produce + in the Product, is evident from *Multiplication* in *Common Arithmetick*: viz. + 5 into + 7 will give + 35 etc. But that + into —, or — into + should produce the Sign — and that — into — should produce the Sign +, ... may perhaps seem somewhat hard to be conceived; and requires a Demonstration.

The demonstration uses the postulates that equals multiplied by equals yield equals, and the same for addition and subtraction. One of his illustrations will suffice. To prove that — 7 b into + 3 f equals — 21 bf , he reasons as follows :

suppose

$$4 a - 7 b = 0$$

then

$$4 a = 7 b$$

but

$$+ 3 f = + 3 f$$

multiplying

$$12 af = 21 bf$$

or

$$12 af - 21 bf = 0$$

Consequently $+$ into $-$ or $-$ into $+$ produces $-$. That is, the product of $-7b$ by $+3f$ was found by first finding the product of $7b$ by $3f$.

Bonnycastle's *Introduction to Algebra with Notes and Observations* had a number of editions in the United States, the first being Philadelphia, 1806. In this text, the explanation of the rules is given in a foot-note. The author establishes the product of two positive quantities by assuming that multiplying by $+b$ means taking the multiplicand b times. Then, the other cases are explained as follows:

2nd. — If two quantities are to be multiplied together, the result will be exactly the same in whatever order they are placed; for a times b is the same as b times a : and, therefore, when $-a$ is to be multiplied by $+b$, or $+b$ by $-a$, this is the same as taking $-a$ as many times as there are units in $+b$; and since the sum of any number of negative terms is negative; it is evident that $(-a) \times (+b)$ or $(+b) \times (-a) = -ab$.

3d. — When $-a$ is to be multiplied by $-b$: Here $a - a = 0$, therefore $(a - a) \times -b$ is also $= 0$ because 0 multiplied by any quantity produces 0 ; and since the first term of the product, or $a \times (-b)$ is, by case 2, $-ab$, the last term or $(-a) \times (-b)$ must be $+ab$, in order to make the sum $(-ab + ab) = 0$ consequently $(-a) \times (-b) = +ab$.

The third New York edition was « revised, corrected, and enlarged... by James Ryan ». It appeared in 1825. The note on the signs in multiplication differs from that of the Philadelphia edition of 1806. Its explanation is:

The above rule for the signs may be proved thus: if B, b be any two quantities, of which B is the greater, and $B - b$ is to be multiplied by a , it is plain that the product, in this case, must be less than aB , because $B - b$ is less than B ; and consequently, when each of the terms of the former are multiplied by a , as above, the result will be

$$(B - b) \times a = aB - ab$$

For if it were $aB + ab$, the product would be greater than aB , which is absurd.

Also, if B be greater than b , and A greater than a , and it is required to multiply $B - b$ by $A - a$, the result will be

$$(B - b) \times (A - a) = AB - aB - bA + ab$$

For the product of $B - b$ by A is $A(B - b)$ or $AB - Ab$ and that of $B - b$ by $-a$ which is to be taken from the former, is $-a(B - b)$, as has been already shown; whence $B - b$ being less than B , it is evident that the part which is to be taken away must be less than aB ; and consequently since the first part of this product is $-aB$, the second part must be $+ab$; for if it were $-ab$, a greater part than aB would be taken from $A(B - b)$ which is absurd.

The introductions to each of these editions speak of the « moderns » to whom « we are principally indebted for the most curious refinements of the art » (algebra) and its great and extensive usefulness in every abstruse and difficult inquiry. » Each edition mentions Newton, MacLaurin, Saunderson, Simpson, and Emerson. The edition of 1825 inserts

the names of Clairaut, Euler, Lagrange, and Lacroix also and each edition then concludes with the statement that the men cited « have particularly excelled in this respect; and it is to their works that I would refer the young student as patterns of elegance and perfection ». There may be no significance in the reference to Lacroix (1765-1843), but Lacroix was a well-known teacher and textbook writer and was successively at the Ecole Normale, the Ecole Polytechnique, and the Collège de France. His *Algebra* was translated « for the use of the students of the University at Cambridge, New England » by John Farrar and was published as a part of the first volume of *Cambridge Mathematics*. The quotation that follows is from the Fourth Edition (Boston 1833).

When the multiplicand contains parts to be subtracted, the products of these parts by the multiplier must be taken from the others, or in other words, have the sign — prefixed to them, for example :

$$\begin{array}{rcl} \text{the product of} & a - b \\ \text{multiplied by} & c \\ \text{is} & \hline & ac - bc; \end{array}$$

for each time that we take the entire quantity a , which was to have been diminished by b before the multiplication, we take the quantity b too much; the product ac therefore, in which the whole of a is taken as many times as is denoted by the number c , exceeds the product sought by the quantity b , taken as many times as is denoted by the number c , that is by the product bc ; we ought then to subtract bc from ac which gives as above,

$$ac - bc$$

A little more explanation follows and then there is the conclusion :

When the multiplier has the sign $+$, the product has the same sign as the corresponding part of the multiplicand.

The author next discusses the product of $a - b$ by $c - d$, which has the product

$$\begin{array}{r} ac - bc \\ - ad + bd \end{array}$$

for the product of the multiplicand by the first term of the multiplier, will be by the last example $ac - bc$; but by taking the whole of c for the multiplier instead of c diminished by d , we take the whole of $a - b$ so many times too much as is denoted by the number $-d$; so the product $ac - bc$ exceeds that sought by the product of $a - b$ by d . Now this last is, by what has been said, $ad - bd$, and in order to subtract it from the first it is necessary to change the signs. We have then $ac - bc - ad + bd$ for the result required... We conclude that... each particular product must have the same sign, as the corresponding part of the multiplicand, when the multiplier has the sign $+$, and the contrary sign when the individual multiplier has the sign $-$.

Warren Colburn's *Introduction to Algebra upon the Inductive Method of Instruction* (Boston 1836) begins by illustrations, — A is worth a number a of dollars, B is not worth so much as A by a number b of dollars, and C is worth c times as much as B , how much is C worth ? If a is greater than b , then $c(a - b)$ is positive, but if b is greater than a , then $ac - bc$ is negative.

Another example follows :

A gentleman owned a number of farms, and each farm was worth a number c of dollars, which was his whole property. He hired money and fitted out a number b of vessels and each vessel was worth as much as one of his farms. All the vessels were lost at sea. How much was he then worth ?... Now if the number of farms exceeded the number of vessels, he still had some property but if the number of vessels exceeded the number of farms, the quantity $ac - bc$ is negative and he owed more than he could pay. Hence if a positive quantity be multiplied by a negative the product will be negative.

The author then goes to the problem of $a - b$ multiplied by $c - d$. He shows that the product may be put in the form

$$(a - b) c + (b - a) d$$

Let it be remembered that $a - b$ has the same numerical value as $b - a$, they differ only in sign. Suppose $a - b = -m$, then by changing all the signs $b - a = +m$. Hence

$$(a - b) c + (b - a) d = -cm + dm = m(d - c)$$

Now if d is greater than c (which is the case when $c - d$ is negative), the quantity $m(d - c)$ is positive.

Suppose both $a - b$ and $c - d$ to be negative, as before; then $b - a$ and $d - c$ will both be positive, and their product will be positive. (The multiplication is then performed.) This product is precisely the same as that produced by multiplying $a - b$ by $c - d$. Therefore if two negative quantities be multiplied together, the product will be the same as that of two positive quantities of the same numerical value, and will have the positive sign.

It should be remembered that these examples are not by any means a complete collection, but they have the merit of showing a number of different approaches to the topics from Sir Isaac Newton's enunciation of the rules to the detail of the Lacroix presentation.

B. LEFÉBURE S. J., *Cours développé d'algèbre élémentaire*. Namur, Librairie Classique de Ad. Wesmael-Charlier, 1897, tome I, p. 52-55.

Multiplication des quantités algébriques

Définition. — On appelle multiplication de deux quantités algébriques l'opération qui consiste à soumettre la première de ces deux quantités, appelée multiplicande, aux mêmes opérations qu'il faudrait effectuer sur l'unité positive pour former la seconde de ces quantités, appelée multipliateur.

Le résultat de cette opération s'appelle le produit algébrique des deux quantités ou des deux facteurs.

De cette définition se déduit la règle suivante :

Règle : Le produit de deux quantités algébriques s'obtient en effectuant le produit de leurs valeurs absolues et en affectant ce produit du signe de la première quantité si la seconde est positive, et du signe opposé au signe de la première, si la seconde est négative.

Exemples :	$+ 3 \times + 2 = + 6$	$+ 3 \times - 2 = - 6$
	$- 3 \times + 2 = - 6$	$- 3 \times - 2 = + 6$

$$\begin{array}{ll} \text{En général :} & (+a)(+b) = +ab \quad (+a)(-b) = -ab \\ & (-a)(+b) = -ab \quad (-a)(-b) = +ab \end{array}$$

En effet, 1^o supposons d'abord que le multiplicateur ait une valeur absolue entière. Le multiplicateur est positif ou négatif :

Soit le cas d'un multiplicateur positif : $(+a)(+b)$ ou $(-a)(+b)$. Le multiplicateur positif $+b$ indique, par définition, qu'il faut prendre b fois par voie d'addition la quantité, soit positive, soit négative, désignée par le multiplicande, de même que $+b$ est formée de l'unité positive $+1$ prise b fois par voie d'addition. On a donc :

$$\begin{aligned} (+a)(+b) &= (+a) + (+a) + (+a) + \dots = \\ &= +a + a + a + a \dots = +(ab) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-a)(+b) &= (-a) + (-a) + (-a) + \dots = \\ &= -a - a - a - a \dots = -(ab) \end{aligned}$$

Soit le cas d'un multiplicateur négatif : $(+a)(-b)$ ou $(-a)(-b)$. Le multiplicateur $-b$ indique, par définition, qu'il faut prendre b fois par voie de soustraction la quantité multiplicande, de même que $-b$ est formé de l'unité positive $+1$ prise b fois par voie de soustraction. On a donc

$$\begin{aligned} (+a)(-b) &= -(+a) - (+a) - (+a) - \dots = \\ &= -a - a - a - a \dots = -(ab) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -(-a) - (-a) - (-a) - \dots = \\ &= +a + a + a + a \dots = +(ab) \end{aligned}$$

2^o Supposons ensuite un multiplicateur de valeur absolue fractionnaire...

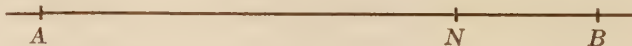
On voit que, dans tous les cas, la définition de la multiplication des quantités algébriques conduit à la règle énoncée.

Corollaire. Le produit de deux facteurs est positif ou négatif suivant que ces facteurs ont mêmes signes ou signes contraires¹.

On énonce parfois cette règle des signes en disant : $+$ par $+$ donne $+$, $+$ par $-$ donne $-$; $-$ par $+$ donne $-$; $-$ par $-$ donne $+$.

Application. — Problème. — Un train parcourt avec une vitesse de 60 km à l'heure la ligne de chemin de fer reliant les villes A et B et traverse actuellement la gare de N . A quelle distance x de cette gare se trouve-t-il à une époque séparée de l'instant présent par un intervalle de 3 heures ?

Si le train roule de A vers B , dans 3 heures il sera à une distance $x = vt = 60 \times 3 = 180$ km de N ., dans la direction de B .



¹ Cette règle des signes était déjà parfaitement formulée par DIOPHANTE : *λείψις ἐπὶ λείψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὑπαρξιν*; minus per minus multiplicatum efficit plus (Arithm. I, def. 9).

Le vieil algébriste CHUQUET ouvre son chapitre sur la multiplication en ces termes : « Il est chose convenable premièrement scavoir. Qui multiplie plus par plus et moins par moins il en vient plus. Et qui multiplie plus par moins vel e ca, il en vient tousiours moins. »

Mais dans son énoncé général, le problème comprend quatre cas différents. — Le train se dirige vers B : à quelle distance de N se trouvera-t-il dans 3 heures ? Le train se dirige vers B : à quelle distance de N se trouvait-il il y a 3 heures ? Le train se dirige vers A : à quelle distance se trouvera-t-il dans 3 heures ? Le train se dirige vers A : à quelle distance se trouvait-il il y a 3 heures ?

Appelons positif le temps à venir, négatif le temps écoulé ; positives les longueurs mesurées ou parcourues dans la direction de A vers B , négatives les longueurs mesurées ou parcourues dans le sens opposé.

Aux quatre questions distinctes correspondent quatre égalités :

$$x = (+60)(+3) = +180;$$

$$x = (+60)(-3) = -180;$$

$$x = (-60)(+3) = -180;$$

$$x = (-60)(-3) = +180.$$

Dans le premier et dans le quatrième cas, le train, à l'époque demandée, se trouve à 180 km de N dans la direction de B ; dans le second et le troisième cas, il se trouve à 180 km de N dans la direction de A .

On voit que la simple application de la règle de la multiplication de deux facteurs algébriques donne en *grandeur* et en *direction* la quantité $x = vt$ demandée¹.

Justification de la définition. — Proposition. — La définition de la multiplication algébrique constitue une généralisation naturelle et légitime de la définition de la multiplication arithmétique...

JULES MARGOT, *Algèbre et Géométrie*. Lausanne, Payot, 1925, p. 39-40.

157. Multiplication de deux nombres algébriques.

$+2 \times +3 = +6$	$d \times m = dm$
$+2 \times -3 = -6$	$d \times -m = -dm$
$-2 \times +3 = -6$	$-d \times m = -dm$
$-2 \times -3 = +6$	$-d \times -m = dm$

Pour comprendre cette multiplication et, en particulier, pour saisir le rôle que joue le multiplicateur affecté du signe $+$ ou du signe $-$, considérons la variation de température de deux milieux C et F . Nous pouvons avoir :

1. Milieu C , chaud, température $+10^\circ$.

Si la chaleur augmente de 3 fois 2° ($+2^\circ \times +3$), la colonne de mercure monte de 6 divisions ou indique une élévation de température de 6° , soit $+6^\circ$.

Si la chaleur diminue de 3 fois 2° ($+2^\circ \times -3$), la colonne descend de 6 divisions ou indique un abaissement de température de 6° , soit -6° .

2. Milieu F , froid, température -8° .

Si le froid augmente de 3 fois 2° ($-2^\circ \times +3$), la colonne descend de 6 divisions, soit -6° .

Si le froid diminue de 3 fois 2° ($-2^\circ \times -3$), la colonne monte de 6 divisions, soit $+6^\circ$.

¹ Cette application concrète de la règle abstraite ne constitue pas une démonstration de cette règle, mais une vérification et une justification.

Règle. Pour multiplier deux nombres algébriques, on fait le produit de leurs valeurs absolues et on affecte ce produit du signe $+$ si les deux nombres ont le même signe, et du signe $-$ s'ils ont des signes contraires.

La règle suivante, dite *règle des signes*, indique immédiatement le signe du produit de deux nombres algébriques :

$+$	par	$+$	donne	$+$
$+$	»	$-$	»	$-$
$-$	»	$+$	»	$-$
$-$	»	$-$	»	$+$

A. FOUCHÉ, *La pédagogie des mathématiques*. Paris, P.U.F., 1952, p. 44.

Multiplication des nombres algébriques

Supposons que l'on ait à faire le thème algébrique de la phrase claire suivante : Ajouter 2 gains de 100 francs et supprimer 3 pertes de 50 francs à ce qui est en caisse. On obtiendra :

$$+ 2 (+ 100) + (- 3) (- 50)$$

Les mots *ajouter 2* se traduisent par $+ 2$, composé du signe de l'addition et du nombre arithmétique 2, mais les mots *supprimer 3* se traduisent tout naturellement par le nombre algébrique $- 3$. On est, en effet, obligé de mettre $- 3$ entre parenthèses pour éviter le voisinage des signes $+$ et $-$ qui traduisent respectivement les mots *et* et *supprimer*. Le nombre algébrique $- 3$ reste cette fois entièrement actif, puisqu'il est multiplicateur abstrait. On pourrait, de même, considérer $+ 2$ comme un nombre algébrique et le mettre aussi entre parenthèses, mais ce serait inutile.

On remarquera que le signe de la multiplication n'apparaît pas plus dans le thème algébrique, que le mot *fois* dans la phrase claire. Ils sont, l'un et l'autre, inutiles.

Ajouter 2 gains de 100 équivaut à un gain de 200 donc

$$+ 2 (+ 100) = (+ 2) \times (+ 100) = + 200$$

Supprimer 3 pertes de 50 équivaut à un gain de 150, donc

$$(- 3) (- 50) = (- 3) \times (- 50) = + 150$$

On retrouve, là encore, la règle de combinaison des signes $+$ et $-$, appliquée cette fois au produit de nombres algébriques.

Un raccordement technique de la multiplication des nombres algébriques avec les théorèmes d'arithmétique relatifs aux produits de sommes et de différences est possible, mais il vaut mieux le présenter comme un raccordement d'habitudes que comme une véritable démonstration.

OTT K., *Minus mal minus gleich plus*. Zurich, Schweizerische Jahresszeitung, 1951.

Bekanntlich hat diese Beziehung einen gewissen mystischen Beigeschmack. Er geht zu Lasten von Begründungen, welche die Meinung aufkommen lassen, es gehe da nicht ganz mit rechten Dingen zu.

Um das Produkt $(-5) \cdot (-4)$ auszurechnen, wird z. B. oft $(0-5) \cdot (0-4)$ nach der Formel $(a-b)(c-d) = (a-b)c - (a-b)d = ac - bc - (ad - bd) = ac - bc - ad + bd$ umgeformt, dabei aber « vergessen » dass ihre Herleitung an die Voraussetzungen $a > b$ und $c > d$ geknüpft war. Denselben Denkfehler begeht man beim « Beweis » der Beziehung $4 - (-7) = 4 + 7$, falls man im Ausdruck $4 - (0-7)$ die Klammer auf Grund der Formel $a - (b-c) = a - b + c$ löst, dabei aber nicht beachtet, dass sie zunächst nur gilt, wenn $b > c$ und $a > (b-c)$ ist. F. Klein schreibt hiezu in seinem bekannten Buche über Elementarmathematik vom höhern Standpunkt aus (Springer 1924): « Gegenüber dieser Praxis möchte ich doch allgemein die Forderung aufstellen, keine Versuche zum Erschleichen unmöglicher Beweise zu machen. »

Nicht erst das Rechnen mit den negativen Zahlen sondern schon ihre Einführung bereitet Schwierigkeiten. Da heisst es z. B. die Differenz von 0 und 5 sei die neue, negative Zahl $0-5$, oder kürzer -5 . M. Simon (*Methodik der elementaren Arithmetik*. Teubner, 1906) sagt dazu: « So leicht scheinbar dieser rein formale Standpunkt ist... der Schüler hat immer das Gefühl dabei, dass etwas faul im Staate Dänemark. Und das Gefühl täuscht ihn auch nicht, denn sind die negativen Zahlen wirklich Zahlen, so muss unter sie etwas Abzählbares fallen... » Auch kritische Mathematiker lehnten diese « formalen » Differenzen je und je ab, und erst das späte 19. Jahrhundert brachte eine einwandfreie, natürliche Erklärung der negativen Zahlen. *Der einführende Algebraunterricht soll nicht mit denselben belastet werden*, da sie nun einfach einmal ein gewisses Abstraktionsvermögen verlangen und zunächst auch nicht viel nützen.

Suchen wir jetzt für die spätere Behandlung guten Rat, so weist nach meinen Erfahrungen das Vorgehen der Primarschule bei der Einführung des Rechnens mit den natürlichen und den gebrochenen Zahlen einen gangbaren Weg. Man fängt dort nicht mit der « Zahl 13 » an, sondern mit 3 Äpfeln, 3 Buben, 3 aufeinanderfolgenden gleichen Tätigkeiten und abstrahiert daraus die reine Zahl 3 in ihrer anschaulichen Bedeutung als Eigenschaft einer Menge. Man fügt zusammen, nimmt weg, wiederholt gleiche Operationen, erzeugt gleiche Bruchstücke von Stäben und runden Kuchen und führt zur Abkürzung Zeichen oder Symbole ein. Entsprechend sind nun die negativen Zahlen und das Rechnen mit ihnen einzuführen.

W. Lietzmann (*Methodik des mathematischen Unterrichts*. Leipzig, 1923) schreibt: « Wie sich der Schüler die Welt der abstrakten natürlichen Zahlen angewandt und vielfach innig verbunden denkt mit der Welt der realen Wirklichkeit, so will er auch mit den neuen Zahlbegriffen Dinge aus der Wirklichkeit in Verbindung bringen... die Operationen irgendwie deuten... ist nicht mit dem Symbol zufrieden; er will damit konkrete Vorstellungen verknüpfen. »

Erzeugt ein Motor eine Zugkraft von 1000 kg so kommt es darauf an, ob sie nach vorwärts oder nach rückwärts zieht. Schauen wir nicht einfach darauf, wie gross die Kraft ist, ohne Berücksichtigung ihrer Richtung, als « absolute » Grösse, so sind die beiden Kräfte durchaus verschieden. Wir wollen sagen, die eine sei $K 1 = 1000 \text{ kg}$ die andere $K 2 = 1000 \text{ kg}$, nennen den Pfeil ihr Richtungs-, Qualitäts- oder Vorzeichen und die 1000 kg, ihren absoluten Betrag $K 1$ bzw. $K 2$. Statt zu sagen, ich habe 100 Fr. Guthaben oder 100 Fr. Schulden, sage ich, ich habe 100 Fr. bzw. 100 Fr. (oder umgekehrt). Wärme und Kälte, entgegengesetzte Verschiebungen, Drehungen, Stromstärken, Geschwindig-

keiten, Abstände von einem Fixpunkt, können ebenso unterschieden werden. Allgemein muss ein System von Dingen vorliegen, die einen sie zerstörenden Gegensatz besetzen (Lœwy, *Grundlagen der Arithmetik*. Leipzig 1915). Wir machen also aus jeder bisherigen « *absoluten Zahl* » deren zwei. Indem wir sie « in bezug auf » oder relativ zu ihrer Richtung betrachten, erhalten wir neue Dinge, die gerichteten oder « *relativen Zahlen* ». $\bar{10}$ und $\bar{10}$ heissen entgegengesetzte Zahlen (gleicher absoluter Betrag aber verschiedene Vorzeichen!).

Einwände: Man kann fragen, wie es denn nun mit den andern möglichen Richtungen einer Kraft, eines Abstandes usw. sei. Die Antwort ist, dass diese Fälle auf die imaginären und komplexen Zahlen führen. Warum schreibt er denn nicht $+1000$ kg und -1000 kg wie es üblich ist? Lietzmann sagt: « Die Einführung der negativen Zahlen wird durch eine *lächerliche Ausserlichkeit* gewaltig erschwert. Wir bezeichnen sie dadurch, dass wir ihnen das Operationszeichen der Subtraktion vorsetzen. *Das Zeichen — ist also zweideutig!* Gewiss ist diese Wahl zweckmässig, wenn man erst zu der Erkenntnis durchgedrungen ist, dass es gleichgültig ist, die Zahl a zu subtrahieren oder die entgegengesetzte Zahl $-a$ zu addieren, oder dass ein Operieren mit der Zahl $-a$ einem Operieren mit der Differenz $0 - a$ gleichkommt. Aber das soll erst noch kommen. » Die alten Inder, die Erfinder der negativen Zahlen, schrieben 10 statt -10 , andere 10'. Auch anders geschriebene Plus- und Minuszeichen kommen vor. Loewy (*zit*) und Mohrmann (*Bardeys Aufgabensammlung*) (11. Aufl. Teubner, 1923) schreiben $\bar{10}$. Die berechtigte Frage, ob man überhaupt das Recht habe, diese neuartigen Dinge $\bar{10}$, $\bar{10}$ usw. « Zahlen » zu nennen, beantwortet man mit dem Nachweis, dass man mit ihnen rechnen kann, wie üblich.

Eine wesentliche Schwierigkeit bei der *Einführung der Operationen mit den neuen Zahlen* besteht darin, dass der Schüler infolge der jahrelangen Automatisierung des Rechnens meint, es sei an sich selbstverständlich, was das heisse, zwei Zahlen zu addieren usw. Er kann sich nicht mehr in die Lage des ABC Schützen versetzen, dem man etwa sagte, er solle aus zwei Haufen von 5 und 3 Nüssen einen machen, und feststellen, wie viele Nüsse er enthalte: Das nenne man 5 und 3 zusammenzählen! Genau so ist zuerst zu zeigen, wie man auch aus zwei « gerichteten Zahlen » stets eindeutig eine dritte, *ihre Summe* gewinnen kann. Wirken auf einen Körper die Kräfte 170 kg nach oben ($\bar{170}$ kg) und 80 kg nach unten ($\bar{80}$ kg), so beträgt die gesamte wirksame Kraft $\bar{170}$ kg $+ \bar{80}$ kg, oder ausgerechnet $\bar{90}$ kg, wie anschaulich leicht einzusehen ist. Drehe ich den Uhrzeiger zuerst um 17° vorwärts, dann um 29° zurück, so ist die totale Drehung $\bar{17}^\circ + \bar{29}^\circ = \bar{12}^\circ$. Ebenso kann man geradlinige Verschiebungen (Vektoren auf einer Geraden) herausziehen. Stehen in einer Buchhaltung zwei Posten von 110 Fr. Schulden und 40 Fr. Schulden, so ergibt sich als « Gesamtvermögen » beim Abschluss $\bar{110}$ Fr. $+ \bar{40}$ Fr. $= \bar{150}$ Fr. Aus einer genügenden Zahl solcher Beispiele lässt sich leicht die *Additionsregel* abstrahieren: Zwei Zahlen mit gleichen Vorzeichen addiert man, indem man ihre absoluten Beträge addiert und das Vorzeichen der Summanden beibehält, zwei Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen, indem man den kleinern absoluten Betrag vom grössern subtrahiert und als Vorzeichen dasjenige der Zahl mit dem grössern absoluten Betrag wählt. An Beispielen ist auch leicht zu zeigen, dass *die Summe zweier entgegengesetzter Zahlen*

stets gleich 0 ist (die Kraft 0 kg bedeutet, es wirkt *keine* Kraft! Lat. nullus = keiner). Etwas schwieriger ist die *Subtraktion* «*gerichteter Zahlen*».

3 Äpfel von 8 Äpfeln subtrahieren hiess feststellen, wie viele übrig bleiben, wenn man von 8 Äpfeln deren 3 wegnimmt, oder: wie viele muss ich zu einem Haufen von 3 dazulegen, damit er 8 enthält? Die Bilanz einer Buchhaltung mit zwei Posten ergab 70 Fr. Guthaben (70 Fr.). Der erste Posten beträgt 100 Fr. Guthaben (100 Fr.). Wie gross ist der zweite? (Oder: Dieser erste Posten wird gestrichen. Was bleibt übrig). Dann ist die Differenz $70 \text{ Fr.} - 100 \text{ Fr.} = 30 \text{ Fr.}$

(Probe: $30 \text{ Fr.} + 100 \text{ Fr.} = 70 \text{ Fr.}$!)

Die «*Resultierende*» zweier in derselben Geraden wirkenden Kräfte beträgt 40 kg. Wie gross ist die zweite, wenn die erste 90 kg ist? Lösung: $40 \text{ kg} - 90 \text{ kg} = 130 \text{ kg.}$

Probe: $130 \text{ kg} + 90 \text{ kg} = 40 \text{ kg.}$

Welche Temperaturänderung ergibt zusammen mit einer Abnahme um 14° eine Zunahme von 29° ? Antwort: $29^\circ - 14^\circ = 43^\circ$ (Probe: $43^\circ + 14^\circ = 29^\circ$). Wieder ergibt sich eine Regel: Eine relative Zahl wird subtrahiert, indem man ihre entgegengesetzte addiert. Wesentlich ist jedoch, dass wie man sieht, *die Subtraktion zweier relativen Zahlen stets ausführbar* ist. Insbesondere lässt sich jede Zahl von 0 subtrahieren!

$$\begin{aligned} 0 \text{ Fr.} - \vec{8} \text{ Fr.} &= \vec{8} \text{ Fr.} \text{ allgemein } 0 - \vec{a} = \vec{a} \\ 0 \text{ Fr.} - \vec{8} \text{ Fr.} &= \vec{8} \text{ Fr.} \text{ allgemein } 0 - \vec{a} = \vec{a} \end{aligned}$$

Es lässt sich jetzt zeigen, was aber in der Schule mit Recht gewöhnlich übergangen wird, dass für diese Addition und Subtraktion der relativen Zahlen die gleichen Gesetze gelten wie für die bisherigen absoluten Zahlen (Klammern setzen und lösen, ausrechnen eines zwei- oder mehrgliedrigen Ausdrucks in beliebiger Reihenfolge) und, dass das nur dann so ist, wenn die beiden Operationen gemäss den angegebenen Regeln erklärt sind (*Satz von der Permanenz der Rechengesetze*, Hankel 1867). Interessierte Kollegen seien hingewiesen auf: E. Landau, *Grundlagen der Analysis*, New-York, 1946; ferner auf R. Nevanlinna, *Leitende Gesichtspunkte in der Entwicklung der Mathematik*, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft, Zürich, Heft 1, 1950.

Und nun *die übliche Bezeichnung der relativen Zahlen*! Die Symbolik ist immer sekundär. Wie gezeigt wurde, ist $\vec{a} = 0 - \vec{a}$ und $\vec{a} = 0 - \vec{a}$, oder:

Die zu einer beliebigen relativen Zahl A entgegengesetzte ist $0 - A$. Bezeichnungen oder *individuelle Zahlzeichen* A sind deshalb nur für die Zahlen der einen Richtung nötig, etwa für alle Guthaben, für alle Kräfte nach oben, alle Abstände nach rechts usw.

Die Zahlen der andern Richtung können dann durch die Differenzen $0 - A$ bezeichnet oder dargestellt werden. Als individuelle Zeichen für die Zahlen der «*einen Richtung*» wählt man zweckmässig ihre absoluten Beträge $1, 2, 3, 4 \dots 3, 17; 5/6; z$ usw. Die zu ihnen entgegengesetzten Zahlen der «*andern Richtung*» heissen dann $0 - 1, 0 - 2, 0 - 3, 0 - 4 \dots 0 - 3, 17, 0 - 5/6, 0 - z$, usw. Da die Glieder 0 bei der Ausrechnung eines mehrgliedrigen Ausdrucks bedeutungslos sind, lässt

man sie weg, *setzt also fest* — z bedeute 0 — z . (Negative Zahlen: — 1, — 2, — 3, usw.) Will man für die Zahlen der « einen Richtung » Zeichen haben, die sich von den Zeichen für ihre absoluten Beträge unterscheiden, so schreibt man + 1, + 2, + 3, + 4 usw. (+ z bedeute $0 + z = z$, positive Zahlen). Notwendig ist das nicht. Man muss, um diese Festsetzungen betreffend die Bezeichnungen richtig erfassen zu können, erkennen, dass *Zahl und Zahlzeichen zweierlei* ist: Was sich ein Tibetaner beim Zählen *denkt*, ist genau dasselbe wie bei uns, trotz anderer Worte und Zeichen. Diese relativen Zahlen existieren genau so wirklich wie die allgemein üblichen ungerichteten oder absoluten und sind nicht irgendwie künstlich, unnatürlich, imaginär oder absurd. Alle Zahlen sind « freie Schöpfungen unseres Geistes » (Gauss) welche Beziehungen der Aussenwelt umkehrbar eindeutig in unser Bewusstsein abbilden.

Schliesslich noch die *Multiplikation (und Division) der relativen Zahlen*! Ein unzulässiger Beweis der bekannten *Vorzeichenregeln* wurde schon eingangs erwähnt. Grundsätzlich ist festzustellen, dass man *zuerst überhaupt erklären muss, was das heisst, zwei gerichtete Zahlen zu multiplizieren*. Die Division ist dann die Umkehrung. Es liegt derselbe Fall vor wie im Bruchrechnen, wo man $4/5$ Fr. $3/7$ auch nicht auf Grund der Erklärung $4/5$ Fr. 3 bedeute $4/5$ Fr. + $4/5$ Fr. + $4/5$ Fr. ausrechnen kann, und dann die neue Operation so *erklärt*, dass sie den Preis von $3/7$ kg zu $4/5$ Fr. liefert, genau so wie die Multiplikation mit einer ganzen Zahl den Preis von 3 kg ergab. Es ist methodisch verfehlt, etwas beweisen zu wollen, was zu definieren ist. Die neue Multiplikation gerichteter Zahlen wird erklärt durch den Wunsch, sie solle nicht nur den Betrag, sondern auch die Richtung der gesuchten Grösse liefern. Hier sind gute *Beispiele* notwendig. Lietzmann gibt folgendes Beispiel: « (+ 3) . (+ 5) heisst, 5 mal werden 3 Schritte nach rechts addiert, das gibt 15 Schritte nach rechts; (— 3) . (+ 5) heisst, 5 mal werden 3 Schritte nach links addiert, das gibt 15 Schritte nach links; (+ 3) . (— 5) heisst, 5 mal werden 3 Schritte nach rechts subtrahiert, das gibt 15 Schritte nach links; (— 3) . (— 5) heisst, 5 mal werden 3 Schritte nach links subtrahiert, das gibt 15 Schritte nach rechts. »

Oder: Fährt auf der Strasse ein Auto mit der Geschwindigkeit 20 m/s nach rechts (= + 20 m/s) oder nach links (= — 20 m/s) an mir vorbei, so beträgt sein Abstand von mir, nach bzw. vor 10 s (= + 10 s bzw. — 10 s): + 200 m = (+ 20 m/s) . (+ 10 s); — 200 m = (— 20 m/s) . (+ 10 s); — 200 m = (+ 20 m/s) . (— 10 s); + 200 m = (— 20 m/s) . (— 10 s). Hübsche Beispiele gibt auch L. Locher-Ernst (*Arithmetik und Algebra*. Archimedesverlag, 1945): Ich habe vor einiger Zeit angefangen, jeden Tag 10 Fr. Guthaben bzw. Schulden zu machen und setze dies in die Zukunft fort. Die Berechnung der Vermögensänderung in bezug auf den heutigen Tag nach bzw. vor 5 Tagen gibt 4 Fälle: (+ 10 Fr. / Tag) . (+ 5 Tage) = + 50 Fr.; (— 10 Fr. / Tag) . (+ 5 Tage) = — 50 Fr.; (+ 10 Fr. / Tag) . (— 5 Tage) = — 50 Fr.; (— 10 Fr. / Tag) . (— 5 Tage) = + 50 Fr. Kehre ich nur die Richtung der an einem Hebel wirkenden Kraft, bzw. nur die Richtung ihres Arms um, so ändert sein Drehsinn, wechsle ich aber beide Richtungen, so bleibt er erhalten. Weniger anschaulich ist folgende Überlegung: Will man die positiven Zahlen durch ihre absoluten Beträge bezeichnen können, so ist die Multiplikation zweier positiven Zahlen so zu erklären, dass keine Widersprüche auftreten; also (+ 4) . (+ 3) = 4 . 3 = 12 = + 12 und (— 4) . (+ 3) = (— 4) . 3 = (— 4) + (— 4) + (— 4) = — 12. Von hier aus führen zwei Wege weiter. Bilde ich ebenso (— 4) . (+ 2);

$(-4) \cdot (+1)$; $(-4) \cdot 0$ so erhalte ich der Reihe nach -8 ; -4 ; 0 . Damit diese Folge im gleichen Sinne weitergeht (graphische Darstellung des Produktes als Funktion des 2. Faktors!) so muss es heissen $(-4) \cdot (-1) = +4$; $(-4) \cdot (-2) = +8$; $(-4) - (-3) = +12$. Lässt man jetzt den 1. Faktor zukzessive die Werte $-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4$ annehmen, so liefert eine analoge Überlegung $(+4) \cdot (-3) = -12$. Der andere Weg geht von dem Wunsche aus, es solle $(+4) \cdot (-3)$ dieselbe Zahl sein wie $(-3) \cdot (+4) = -12$, mit -3 multiplizieren heisse also, den absoluten Betrag des Multiplikanden mit 3 multiplizieren und das Vorzeichen umkehren; folglich: $(-4) \cdot (-3) = +12$.

Ebenso wie schon bei den Operationen 1. Stufe bemerkt worden war, lässt sich nun auch hier zeigen, dass alle Gesetze, welche für das Multiplizieren (und Dividieren) der bisherigen absoluten Zahlen gültig waren (Berechnen eines Produkts in beliebiger Reihenfolge, Multiplizieren mehrgliedriger Ausdrücke, ausklammern usw.) auch für relative Zahlen und Buchstaben, die solche darstellen, gültig bleiben, falls diese Operationen nach den angegebenen Vorzeichenregeln ausgeführt werden, aber auch nur dann. Damit ist klargelegt, wie sich diese Dinge vom logisch-abstrakten Standpunkt aus verhalten. Alle Vorzeichenregeln bei den Operationen mit den negativen Zahlen sind an sich willkürliche Festsetzungen, welche gestatten, *alle Gesetze über das Rechnen mit absoluten Zahlen weiter zu verwenden*. Da die Subtraktion im Bereiche der relativen Zahlen stets ausführbar ist, *fallen die einschränkenden Nebenbedingungen beim Buchstabenrechnen weg* (z. B. dass $a - b + c = a + c - b$ nur unter der Voraussetzung $a > b$ gilt). Zugleich werden alle Formeln und Berechnungsvorschriften inhaltsreicher, indem sie *auch den Richtungssinn der berechneten Grösse gratis mitliefern und bei den gegebenen Grössen zu berücksichtigen gestatten*. (Soll man z. B. die Mitteltemperatur eines Monats berechnen, so können Kältegrade als negative Zahlen in dieselbe Formel $t = 1/n \cdot (t_1 + t_2 \dots + t_n)$ eingesetzt werden und ein negatives Ergebnis bedeutet, dass im Durchschnitt Kälte herrschte). Geht man nochmals die angegebenen Beispiele durch, so erkennt man, dass dieses Ziel uns unwillkürlich als halb bewusstes Motiv bei der Aufstellung der Rechenoperationen mit den relativen Zahlen führte. Dass der ganze Bau überhaupt möglich ist, ist nicht selbstverständlich. Schon bei räumlich verschiedenen Richtungen geht das nicht mehr. Von einer logischen Notwendigkeit (Beweisbarkeit!) der ganzen Begriffsbildungen kann nicht die Rede sein. Die Logik verlangt nur ihre Widerspruchslosigkeit; nur diese ist zu beweisen, und sonst werden sie nur durch Zweckmäßigkeitsgründen bestimmt. Es ist dann für die meisten Menschen Sache der Gewöhnung, welchen Wirklichkeitsgehalt sie ihnen zuschreiben.

WERNER RENNEBERG, *Einführung der relativen Zahlen*. Berlin-Leipzig, «Mathematik und Naturwissenschaften in der neuen Schule», 3. Jahrgang, Heft 7. Volk und Wisserverlag, 1951.

A. Multiplikation

Bei der Multiplikation zweier Faktoren sind vier Kombinationen der Vorzeichen möglich. Wir führen zwei Methoden zur Ableitung der Vorzeichenregel an.

Erste Methode. Wir gehen von einem praktischen Fall aus, etwa von einem Beispiel aus der sowjetischen Schulmathematik (Moskau 1947).

An der Bahnstrecke Moskau-Leningrad befindet sich eine Station B (Abb. 2). Von B als Nullpunkt aus zählt man die Kilometer in Richtung M positiv, in Richtung L negativ. Ein Zug habe die Reisegeschwindigkeit $v = 40$ km/St. Die Geschwindigkeit erhält das positive Vorzeichen, wenn sich der Zug M nähert, das negative, wenn er sich von M entfernt. Der Zug befindet sich zur Zeit $t = 0$ in B . Die vergangene Zeit wird negativ gezählt, die kommende positiv. Bei der mathematischen Formulierung abstrahieren wir sofort, wir lassen die Benennungen weg. Aufgaben.

1. Wo ist der Zug in drei Stunden, wenn er nach M fährt ?
 $(+ 40) \cdot (+ 3) = (+ 120)$
2. Wo ist der Zug in drei Stunden, wenn er sich von M entfernt ?
 $(- 40) \cdot (+ 3) = (- 120)$
3. Wo war der Zug vor drei Stunden, wenn er nach M fährt ?
 $(+ 40) \cdot (- 3) = (- 120)$
4. Wo war der Zug vor drei Stunden, wenn er von M kommt ?
 $(- 40) \cdot (- 3) = (+ 120)$

Der Ort, an dem sich der Zug zur angegebenen Zeit befindet wird stets aus der Zeichnung entnommen. Dadurch ist jeweils das Vorzeichen des Produktes bestimmt. In der Abb. 2 ist der Fall bzw. 3 dargestellt.

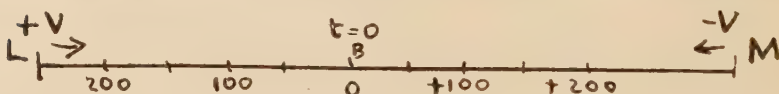


Abb 2

Dadurch, dass in diesem Beispiel die abstrakten Produkte relativer Zahlen mit Realität erfüllt werden, unterscheidet sich die Methode stark von dem Formalismus rein arithmetischer Verfahren. Die neuere Methodik versucht ebenfalls, der Multiplikation relativer Zahlen über das Mathematische hinaus einen Sinn beizulegen. Die Verhältnisse werden meist mit Hilfe von Vermögen und Schulden klargemacht.

Man deutet

die Regel	« + mal + »	als wiederholtes	Zufügen von Vermögen.
»	« + mal — »	»	» » Schulden.
»	« — mal + »	»	Beseitigen von Vermögen.
»	« — mal — »	»	» » Schulden.

Zweite Methode. Arithmetisches Verfahren. Das Vorzeichen des Produktes zweier relativer wird so definiert, dass die formalen Rechengesetze erhalten bleiben (Permanenzprinzip).

Die einzelnen Regeln können wir etwa folgendermassen finden.

a) $(+ 4) \cdot (+ 3) = 4 \cdot 3 = (+ 12)$

Es wird lediglich die Tatsache benutzt, dass wir für positive Zahlen natürliche Zahlen setzen dürfen und umgekehrt.

$$b) \quad (+4) \cdot (-3) = 4 \cdot (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = (-12)$$

Die Multiplikation wird als fortgesetzte Addition aufgefasst. Das soll auch für die negativen Zahlen gelten (Permanenzprinzip).

$$c) \quad (-4) \cdot (+3) = (+3) \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = (-12)$$

Das Vertauschungsgesetz der Multiplikation soll auch für negative Zahlen gelten (Permanenzprinzip). Zurückführung auf den vorigen Fall.

$$d) \quad (-4) \cdot (-3) = (+12)$$

Wir beobachten am ersten und dritten Fall, dass das Produkt das Vorzeichen wechselt, wenn der Multiplikator (erster Faktor) negativ wird. Dasselbe soll auch gelten wenn der Multiplikand negativ ist wie im zweiten und vierten Fall (Permanenzprinzip).

Für die schwer einzusehende vierte Regel insbesondere lassen sich zahlreiche Erläuterungen geben, von denen wir hier noch einige anführen.

1. Methode der Reihenbildung:

$$(+3) \cdot (-4) = (-12); (+2) \cdot (-4) = (-8); (+1) \cdot (-4) = -4$$

Wir erkennen das Bildungsgesetz: wenn der Multiplikator um 1 abnimmt, wird das Produkt um 4 grösser. Nun setzen wir sinngemäss fort:

$$0 \cdot (-4) = 0; (-1) \cdot (-4) = (+4); (-2) \cdot (-4) = (+8) \dots$$

2. Die Aufgabe $(7 - 3) \cdot (5 - 2)$ können wir auf zwei Arten rechnen. Erste Art: Zuerst rechnen wir die Klammern aus:

$$4 \cdot 3 = 12 = (+12)$$

Zweite Art.: Andererseits ergibt sich nach der Multiplikationsregel für zweigliedrige Ausdrücke:

$$35 - 14 - 15 + (-3) \cdot (-2)$$

Nur wenn wir

$$(-3) \cdot (-2) = (+6)$$

setzen, stimmen beide Ergebnisse überein. Damit ist die Notwendigkeit der Festsetzung *minus mal minus ist plus* dargetan.

3. Geometrische Erläuterung unter Anwendung des distributiven Gesetzes. Das Rechteck mit den Seiten 4 cm und 5 cm ist unterteilt in die zwei Rechtecke mit den Seiten 4 cm und 3 cm und den Seiten 4 cm und $(5 - 3)$ cm (Abb. 3). Die Summe der Teilrechtecke ist gleich dem ganzen Rechteck:

$$4 \cdot 5 \text{ cm}^2 = 4 \cdot 3 \text{ cm}^2 + 4 \cdot (5 - 3) \text{ cm}^2$$

Wir abstrahieren und lassen die Benennung weg:

$$4 \cdot 5 = 4 \cdot 3 + 4 \cdot (5 - 3)$$

Die Gleichung ordnen wir um:

$$4 \cdot 3 = 4 \cdot 5 - 4 \cdot (5 - 3)$$

Wir wenden das distributive Gesetz an und schreiben an Stelle des noch unbekannten Vorzeichens des Produktes aus (-4) und (-3) symbolisch (?)

$$4 \cdot 3 = 4 \cdot 5 - 4 \cdot 5 (?) 4 \cdot 3$$

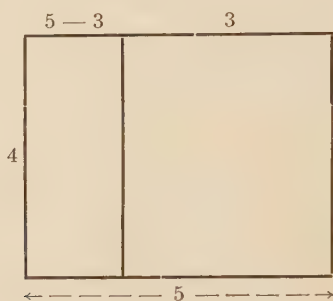


Abb. 3.

Da $4 \cdot 5 - 4 \cdot 5 = 0$ ist und das positive Produkt $4 \cdot 3$ nicht gleich seinem negativen Wert sein kann, muss das fragliche Produkt positiv sein :

$$4 \cdot 3 = 4 \cdot 5 - 4 \cdot 5 + 4 \cdot 3$$

Wir stellen die Regeln für die Multiplikation relativer Zahlen in allgemeinen Zahlen zusammen :

$$\begin{array}{ll} (+a) \cdot (+b) = +ab & (-a) \cdot (+b) = -ab \\ (+a) \cdot (-b) = -ab & (-a) \cdot (-b) = +ab \end{array}$$

Das Produkt zweier relativer Zahlen berechnet man, indem man ihre absoluten Beträge multipliziert und das Vorzeichen des Produktes nach den Vorzeichenregeln bestimmt.

L. GROSGURIN, *L'enseignement de l'algèbre élémentaire*. Baden, 66^e anniversaire de la Société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire. H. R. Sauerländer C^o, Aarau, 1937, p. 126-129.

Il s'agit de remarques critiques sur cet enseignement dans les écoles secondaires de culture générale.

La notion de *mouvement* permet de fonder objectivement et avec continuité les *règles des signes* algébriques. Les signes $+$ et $-$ distinguent les deux sens opposés (positif, négatif) de certaines grandeurs, leurs *modes d'existence opposés* selon le mot de Gergonne. Ce sont des signes qualitatifs.

Ces modes opposés sont réduits en image sur un axe orienté. Les deux sens règnent tout le long de l'axe, sans commencement ni fin. On les définira avant de placer le point origine; ils n'ont rien à voir avec le point zéro. Si l'on commence par placer ce point, on peut être poussé à dire que les deux sens y débudent, ce qui est d'une conception moins générale.

Comment lier d'une manière continue les quatre opérations ?

I. *Addition*. Additionner algébriquement des membres, c'est exécuter sur un axe les mouvements consécutifs commandés par leurs sens, et dire quelle est l'abscisse du point final, l'addition conserve donc les sens.

Distinction : Sur un axe divisé en cm fixons à l'origine une extrémité d'un long fil ; tendons-en 8 cm dans le sens $+$, de là 20 cm dans le sens $-$, puis de là 10 cm dans le sens $+$.

L'addition algébrique des trois mouvements donne -2 (point final).

L'addition absolue des trois tronçons donne 38 (38 cm de fil).

II. *Soustraction.* Définition de $(a - b)$: Quel nombre faut-il ajouter à b pour obtenir a ?

Exemple : $0 - (-3) = ?$

Le signe dans la parenthèse est signe de sens ; celui qui la précède est signe d'opération. La définition donne :

$$0 - (-3) = +3. \text{ En effet } -3 + 3 = 0$$

La soustraction d'un nombre consiste donc à changer son sens.

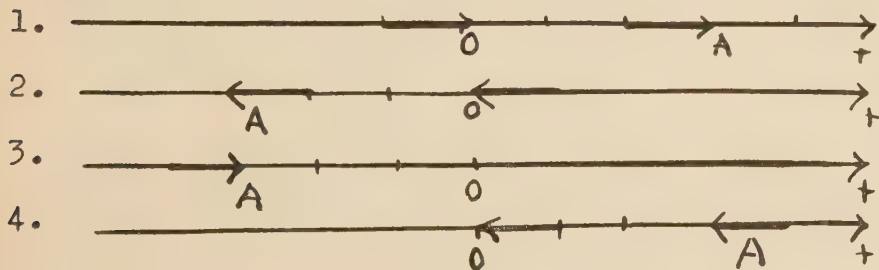
Les deux faces opposées de toute surface plane répondent aux deux sens $+$ et $-$, qu'on peut distinguer visuellement par deux couleurs différentes. Le conférencier, au moyen de figures découpées, rend tangibles les deux opérations ci-dessus.

III. *Multiplication.* On voit parfois établir la *règle des signes* à l'aide d'un produit tel que $(a - b)(c - d)$, mais en se bornant aux valeurs absolues ; puis une discussion montre que cette règle est encore vraie pour les valeurs dirigées. Discussion fastidieuse, qu'on élude parfois en faisant passer la règle subrepticement du premier genre de calcul dans le second.

Actuellement nombre de manuels (citons Bourlet, 1912) se bornent à donner la règle *a priori*. Au lieu d'une liaison continue avec l'acquis, un vide béant. La règle tombe sur nous d'une chute verticale. Comme l'opération flotte dans le vide et n'est rattachée du point de vue des signes à aucune signification, on a le droit de dire tout aussi bien que $- \cdot - = -$, au lieu de $+$.

Reprenons pied ; recourons au mouvement, en réduisant au minimum la structure arithmétique de l'opération. Représentons par une flèche le multiplicande ; sa longueur en figure la valeur absolue et sa pointe le sens.

Pratiquement, ce sera une flèche de carton, qui glissera au tableau sur un axe. Sa pointe marquera à tout instant le point atteint. Dans chaque cas nous partons de zéro (dans la figure, la valeur absolue du multiplicateur est 3).



<i>Flèche</i>	<i>Opération</i>	<i>Résultat</i>
1. positive	addition (sens conservé)	$\overline{OA}$, positif
2. négative	addition (sens conservé)	$\overline{OA}$, négatif
3. positive	soustraction (sens changé)	$\overline{OA}$, négatif
4. négative	soustraction (sens changé)	$\overline{OA}$, positif

En résumé :

<i>Sens</i>	<i>Opération</i>	<i>Sens</i>
$+$.	$+$	$=$ $+$
$-$.	$+$	$=$ $-$
$+$.	$-$	$=$ $-$
$-$.	$-$	$=$ $+$

Il reste à montrer la *propriété commutative*. Par exemple, on fera correctement sur un axe les deux expérimentations suivantes :
 $(-5) \cdot (+3) = ?$ et $(+3) \cdot (-5) = ?$ Même résultat -15 .

On peut donc changer l'ordre des deux facteurs; il n'y a plus lieu de distinguer entre signe de sens et signe d'opération. La règle est établie dans toute sa commodité.

Ces résultats s'obtiennent encore par la marche d'un élève sur un axe orienté : En premier lieu l'élève oriente son regard (signe du multiplicande); puis, pour additionner il marche devant lui; pour soustraire il marche à reculons. En résumé, le problème du courrier de vitesse constante ($e = v \cdot t$) constitue mieux qu'une application de la règle des signes : il en est la démonstration.

IV. Division...

V. Le négatif...

VI. Dira-t-on qu'il importe peu, pour les applications, que l'élève ait saisi le pourquoi d'une règle (ce qui ne signifie pas qu'il soit prêt à en répéter la démonstration) ou qu'il l'ait reçue *a priori* ? On pose alors la question de la valeur formative des mathématiques, qui réside avant tout dans l'esprit qu'on y met. Pierre et Paul pourront dans un exercice donner le résultat exact. Mais ce résultat, réfléchi et chargé d'idées chez Pierre, n'est chez Paul qu'un jeu de lettres. Lorsque Paul « calcule », on peut se demander à quelle occupation alarmante il se livre, car, sans allusions aux quatre opérations de tout le monde, il ne parle que de supprimer, chasser, faire disparaître... Il fait tendre x vers l'infini mais sans élan, et vers zéro mais sans douceur. Confondant signe d'opération et signe de sens, il pense que $-x$ est sûrement négatif, et $+x$ positif... Telles qu'il les voit, les formules lui cachent les faits et obscurcissent son jugement.

BIBLIOGRAPHIE

(Ouvrages cités)

- ADDOR, J. H., *Eléments d'algèbre*. Lausanne, Payot, 1926.
- AEBLI, H., *Didactique psychologique*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1951.
- BLOCH, M. A., *Philosophie de l'éducation nouvelle*. Paris, Presses Universitaires de France, 1948.
- BOREL, E., *Die Elemente der Mathematik*. Leipzig-Berlin, Teubner, 1919.
- BOURLET, C., *Leçons d'algèbre élémentaire*. Paris, Armand Colin, 1896.
- BOUTROUX, P., *L'idéal scientifique des mathématiciens*. Paris, Félix Alcan, 1920.
- BOUTROUX, P., *Les mathématiques*. Paris, Albin Michel, 1922.
- BREIDENBACH, W., *Methodik des mathematischen Unterrichts*. Stuttgart, Ernst Klett, 1950.
- BRUNOLD, C., *L'éducation. Problèmes et perspectives*. Cahiers pédagogiques pour l'enseignement du second degré, Lyon, N° 2, novembre 1951. *L'éducation nationale*, Paris, 1^{er} novembre 1951.
- BRUNSCHVIGG, L., *Les étapes de la philosophie mathématique*. Paris, Félix Alcan, 1929, p. 539-541.
- BUTLER, F. A., *The Improvement of teaching in secondary schools*. Chicago, Illinois, 1939.
- BUTZBERGER, F., *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*. Zurich, Orell Füssli, 1920.
- BUYSE, R., *L'expérimentation en pédagogie*. Bruxelles, Maurice Lamertin, 1935.
- DE CAMBEROUSSE, C., *Cours de mathématiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1884.
- DEWEY, J., *Comment nous pensons*. Paris, Flammarion 1925.
- DOTTRENS, R., *L'enseignement individualisé*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1947.
- ESTÈVE, R., *Cours d'algèbre*. Paris, Gauthier-Villars, 1926.
- EULER, L., *Eléments d'algèbre*. Saint-Petersbourg, Académie impériale des sciences de Saint-Petersbourg, 1770.
- FERRIÈRE, A., *L'école active*. Paris, Delachaux & Niestlé, 2 vol., 1922.
- FLADT, K., *Didaktik und Methodik*. Frankfurt, Hirschgraben, 1950.
- FOUCHÉ, A., *La pédagogie des mathématiques*. Paris, Presses universitaires de France, 1952.
- GRÉVY, A., *Traité d'algèbre*. Paris, Vuibert et Nony, 1905.
- GROSGURIN, L., *L'enseignement de l'algèbre élémentaire*. Baden, Sauerländer, 1937.
- HANKEL, H., *Theorie der Complexen Zahlensysteme*. Leipzig, Leopold Voss, 1867, I. Teil, p. 10-17.
- HEILERMANN, D., *Unterricht in der Algebra*. Essen, Baedeker, 1912.
- HENRION, D., *Traité d'algèbre*. Paris, Fleury Bourriquant, 1621.
- HUBERT, R., *Traité de pédagogie générale*. Paris, Presses Universitaires de France, 1946.
- INHOLDER B., *De la logique concrète de l'enfant à la logique formelle de l'adolescent*. Paris, Presses universitaires de France, 1955.
- JACQUEMOUD, H., *Résumé des leçons d'algèbre*. Genève.
- JOHANNOT, L., *Le raisonnement mathématique de l'adolescent*. Préface de Jean Piaget, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1947.
- KRAKOWSKI, V., *Elementare Algebra*. Zurich, Huonder, 1944.
- LACROIX, S. F., *Eléments d'algèbre*. Paris, Courcier, 1818.
- LEFÈVRE, S. J., *Cours développé d'algèbre élémentaire*. Namur, Wesmael-Charlier, 1897.
- LIETZMANN, W., *Methodik des mathematischen Unterrichts*. Leipzig, Quelle u. Meyer, 1916.

- LORCHER, O., *Lehr u. Übungsbuch der Algebra*. Stuttgart, Grub, 1912.
- MACLAURIN, C., *Treatise of Algebra*. London, Millar and Nourse, 1748.
- MACLAURIN, M., *Traité d'algèbre*, traduit de l'Anglois, avec des augmentations tirées des Mathématiciens les plus célèbres. Paris, Antoine Jambert, 1758.
- MANNING, T., *An Introduction to Arithmetic and Algebra*. Cambridge, Benjamin Flower, 1796.
- MARGOT, J., *Algèbre et géométrie*. Lausanne, Payot, 1925.
- MIALARET, G., *Études de quelques mécanismes algébriques*. Cahiers pédagogiques pour l'enseignement du second degré, Lyon, N° 2, novembre 1951.
- OTT, K., *Minus mal minus gleich plus*. Zurich, Lehrerzeitung, 1951.
- PIAGET, J., *Remarques psychologiques sur le self-government*. Genève, Publication du Bureau international d'éducation, N° 38, 1934.
- PIAGET, J., *Remarques psychologiques sur le travail par équipes*. Genève, Publication du Bureau international d'éducation, N° 39, 1935.
- PIAGET, J., SZEMINSKA, A., *La genèse du nombre chez l'enfant*. Paris, Delachaux et Niestlé, 1941.
- PIAGET, J., INHELDER, B., *Le développement des quantités chez l'enfant*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, 1941.
- PIAGET, J., *Classes, relations et nombres*. Paris, Vrin, 1942.
- PIAGET, J., *Le mécanisme du développement mental*. Genève, « Archives de psychologie », 1942.
- PIAGET, J., *Psychologie de l'intelligence*. Paris, Armand Colin, 1947.
- PIAGET, J., *Traité de logique*. Paris, Armand Colin, 1949.
- PIAGET, J., *Remarques psychologiques sur l'enseignement élémentaire des sciences naturelles*. Paris, UNESCO et BIE, Publication N° 110, 1949.
- PIAGET, J., *Le problème neurologique de l'intériorisation des actions en opérations réversibles*. Genève, « Archives de Psychologie », vol. XXXII, N° 128, 1949.
- PIAGET, J., *Le droit à l'éducation dans le monde actuel*. Paris, UNESCO, 1949, p. 33-37.
- PIAGET, J., *Introduction à l'épistémologie génétique*. Paris, Presses Universitaires de France, 1950.
- PIAGET, J., INHELDER, B., *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris, Presses Universitaires de France, 1951.
- RAUPBACH, J. F., *Die Elemente der Algebra und Analysis*. Breslau, W. G. Korn, 1815.
- RENNEBERG, W., *Minus mal minus ist plus*. Berlin-Leipzig, Volk und Wissen Verlags GmbH, 1947.
- RENNEBERG, W., *Einführung der relativen Zahlen*. Berlin-Leipzig, Volk und Wissen Verlags GmbH, 1951.
- RIGNANO, E., *Psychologie du raisonnement*. Paris, Félix Alcan, 1920.
- ROUSE BALL, W. W., *Histoire des mathématiques*. Paris, Librairie scientifique A. Hermann, 1906.
- SANFORD, VERA, *The Rule on Signs in Multiplication*. Mathematical Teacher, volume XLIV, N° 4, New-York, Avril 1951.
- SAURI, l'Abbé, *Cours complet de mathématiques*. Paris, Ruault, 1774.
- SCHUBERT, H., *Elementare Arithmetik und Algebra*. Leipzig, G. L., Göschensche, 1899.
- SPICHER, A., *Eléments d'algèbre*. Genève, Grivet, 1944.
- VOELMY et MAUTZ, *Leitfaden der Algebra*. Zurich, Orell Füssli, 1947.
- ZADOU-NAISKY, G., *Le travail manuel et l'enseignement des sciences exactes*. « L'école nouvelle française », N° 52, Paris 1951.

TABLE DES MATIÈRES

<i>Avant-propos</i>	5
<i>Introduction</i>	7

PREMIÈRE PARTIE

APERÇU DES MÉTHODES PÉDAGOGIQUES	27
I. <i>Méthode verbale</i>	28
A. Simple énoncé d'une convention	28
B. Explications	29
1. Polynômes	29
2. Signes contraires	30
3. Principe de permanence	31
4. Addition et soustraction	32
II. <i>Méthode intuitive</i>	34
III. <i>Méthode active</i>	39

DEUXIÈME PARTIE

PSYCHOLOGIE GÉNÉTIQUE	47
I. <i>Stade de la pensée représentative préopératoire</i>	53
1. Expérience <i>a</i>) La voiture (en direction fenêtre et corbeille)	53
2. Expérience <i>a</i>) La balance (en mécano; avec poulies et aiguille plus ou moins visible)	59
II. <i>Stade des opérations concrètes</i>	69
1. La voiture (expérience <i>b</i>) dont le but est situé en avant ou en arrière du sujet	70
2. La voiture (expérience <i>b'</i>) dont le but est placé en avant ou en arrière du sujet, avec tableau	75
3. La voiture (expérience <i>c</i>) avec jetons	76
4. La balance (expérience <i>a'</i>) avec tableau	81
5. La balance (expérience <i>b</i>) avec allumettes et tableau . .	88

III. <i>Stade des opérations formelles</i>	92
1. La voiture (expérience <i>b''</i>) dont le but est placé en avant ou en arrière du sujet, avec tableau et synthèse de ce tableau.	93
2. La balance (expérience <i>b'</i>) avec allumettes, tableau et synthèse	94
3. La voiture (expérience <i>d</i>) comportant les signes algébriques.	96
4. La voiture (expérience <i>c'</i>) avec jetons, équivalence . .	100
5. La voiture (expérience <i>c''</i>) avec jetons, équivalence, 2 voitures	102
6. La voiture (expérience <i>c'''</i>) avec jetons, correspondance avec règle des signes	103

TROISIÈME PARTIE

OPÉRATIONS CONCRÈTES.	113
I. <i>Expériences qualitatives</i>	113
1. Opérations de classification.	113
2. Opérations de sériation	114
3. Opérations de conservation.	114
Nos expériences sur la règle des signes	116
Groupe A : Expériences ne faisant intervenir qu'une sorte de mouvement pour les signes moins	116
a) sans signe +	117
1. Les perles	119
2. L'engrenage	120
3. Les poulies	121
b) avec signe +	121
1. Les perles (avec mouvement du sujet)	122
2. Les chiens	125
Groupe B : Expériences faisant intervenir deux sortes de mouvements pour les moins (mouvements rotatif et linéaire)	128
La voiture (rotation ou changement de marche)	129
a) avec petit écran	129
b) avec grand écran	131
Expérience sur le rythme.	135
Les perles dans un tube	135
Expériences préliminaires	138
a) Les poulies (expérience ne faisant intervenir qu'une sorte de mouvements)	138
b) Les miroirs (expérience faisant intervenir deux sortes de mouvements)	139

II. <i>Expériences quantitatives</i>	141
1. Les chemins	142
2. Les ponts	147

QUATRIÈME PARTIE

OPÉRATIONS FORMELLES	151
I. <i>Expériences logiques</i>	151
Groupe a) 1. L'inversion	155
2. Les contraires.	158
Groupe b) 1. Les amis et les ennemis	159
2. Les négations.	161
3. Les ordres	162
II. <i>Expériences mathématiques</i>	166
1. Expériences algébriques. Feuille I.	168
2. Explication de la règle des signes	169
3. Expériences algébriques. Feuille II	176
<i>Conclusion</i>	181
<i>Annexe</i>	191
Addor, Lausanne 1926	192
Borel, Leipzig-Berlin 1919	198
Bourlet, Paris 1896	191
Boutroux, Paris 1922	192
Breidenbach, Stuttgart 1950	202
Brunschvicg, Paris 1929	196
Bützberger, Zurich 1920	200
De Camberousse, Paris 1884	194
Estève, Paris 1926	192
Euler, Saint-Petersbourg 1770.	199
Fladt, Francfort 1950	200
Fouché, Paris 1952	226
Grévy, Paris 1905	197
Groscurin, Baden 1937	234
Heilermann, Essen 1912	199
Henrion, Paris 1621	194
Jacquemoud, Genève.	195
Krakowski, Zurich 1944	193
Lacroix, Paris 1818	203
Lefébure, Namur 1897	223
Lietzmann, Leipzig 1916	212
Lörcher, Stuttgart 1912	192

Maclaurin, London 1748	209
Manning, Cambridge 1796	205
Margot, Lausanne 1925.	225
Ott, Zurich 1951	226
Raupbach, Breslau 1815	192
Renneberg, Berlin-Leipzig 1947	215
Renneberg, Berlin-Leipzig 1951	231
Rolle, Paris 1650	191
Sanford, New-York 1951	219
Sauri, Paris 1774	204
Schubert, Leipzig 1899	201
Spicher, Genève 1941	210
Voellmy et Mautz, Zurich 1947	195
<i>Bibliographie</i>	237

Achévé d'imprimer
le 30 juin 1956
sur les presses de l'imprimerie
Delachaux & Niestlé s. a.
Neuchâtel (Suisse)

